Nombres de Fibonacci

On définit la suite u par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $\forall\, n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Les u_n sont appelés *nombres de Fibonacci.*

Première partie

1. Vérifier que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite u est croissante, et même strictement croissante à partir de $n = 2$.
3. Prouver que : $\forall\, n \geq 6$, $u_n > n$. On en déduit évidemment $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$.
4. Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$.
5. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = u_n u_{n+1}$.
6. Prouver que : $\forall\, n \geq 2$, $u_n u_{n-2} - u_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$ (relation de Simson)
7. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\text{pgcd}(u_n, u_{n+1}) = 1$ (on demande deux démonstrations)
8. Montrer que : $\forall\, n \geq 2$, $u_n\sqrt{2} < u_{n+1} \leq 2u_n$.
9. Prouver que les longueurs des cotés d'un vrai triangle rectangle ne peuvent être des nombres de Fibonacci.
10. On veut montrer que tout entier naturel peut s'écrire comme une somme de nombres de Fibonacci d'indices distincts (théorème de Hoggatt).
    (a) Montrer, par récurrence sur n, que la propriété est vraie pour les entiers strictement inférieurs à u_n.
    (b) Conclure à l'existence de cette décomposition pour tout entier, puis à son unicité.
    (c) Décomposer par exemple l'entier 1000000.
11. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{0 \leq k \leq (n-1)/2} \mathrm{C}_{n-1-k}^{k}$.

    Comment les u_n se déduisent-ils du triangle de Pascal ?
12. On pose : $v_0 = a$, $v_1 = b$, et $\forall\, n \geq 0$, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

    Montrer que : $\forall\, n \geq 0$, $v_n = au_{n-1} + bu_n$.

Deuxième partie

1. Vérifier que : $\forall\, p \geq 2,\ \forall\, q \geq 0,\ u_p u_{q+1} + u_{p-1} u_q = u_{p-1} u_{q+2} + u_{p-2} u_{q+1}$.
2. En déduire : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, q \in \mathbb{N},\ u_{p+q} = u_p u_{q+1} + u_{p-1} u_q$.
3. Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, q \in \mathbb{N},\ p > q \Rightarrow u_p = u_{p-q} u_{q+1} + u_{p-q-1} u_q$.
4. Montrer successivement :
   (a) $\forall\, n \geq 1,\ u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_n^2$
   (b) $\forall\, n \geq 0,\ u_{2n+1} = u_{n+1}^2 + u_n^2$.
   (c) $\forall\, n \geq 1,\ u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$.
   (d) $\forall\, n \geq 0,\ u_{3n+1} = u_{n+1}^3 + 3u_{n+1}u_n^2 - u_n^3$.
   (e) $\forall\, n \geq 0,\ u_{3n+2} = 2u_{n+1}^3 + 3u_{n+1}u_n^2 - u_{n-1}^3$.
5. Montrer que $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*,\ (n|m) \Rightarrow (u_n|u_m)$.
   Indication : procéder par récurrence sur la valeur du quotient $\dfrac{m}{n}$.
6. Etablir que $\forall\, \alpha, m, n \in \mathbb{N}^*$, avec $m < n$, $(\alpha|u_n$ et $\alpha|u_m) \Rightarrow (\alpha|u_{n-m})$.
7. En déduire que : $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{pgcd}(u_n, u_m) = u_{\mathrm{pgcd}(n,m)}$.
   Indication : on s'inspirera de l'algorithme d'Euclide.

Troisième partie

Soit α l'une des racines de $X^2 - X - 1$.

1. Montrer que $\forall\, n \geq 1,\ \alpha^n = u_n \alpha + u_{n-1}$.
2. Posons $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ (formule de Binet).
3. En déduire que u_n est l'entier le plus proche de $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\alpha^n$.
4. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \alpha u_n + \beta^n$.
5. En déduire que : $\forall\, n \geq 2,\ u_{n+1} = \mathrm{E}(\alpha u_n - \beta)$, puis $u_{n+1} + 1 = \mathrm{E}(\alpha(u_n + 1))$.
6. Montrer que u_n^2 est l'entier le plus proche de $v_n = \dfrac{1}{5}\Big(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)^n$.
   Indication : on distinguera les cas n pair et n impair.
7. Montrer que $\displaystyle\lim_{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2^k} = 2$.