Inversion d'une matrice et décomposition LU

1. On pose $u_1 = 2$ et $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.
   Calculer u_n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. [S]
2. On définit la matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
   On définit alors les matrices $A_1, A_2, \dots, A_n$ par :
   – $A_1 = A$.
   – Pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$, A_{i+1} se déduit de A_i par l'opération : $\mathrm{L}_{i+1} \leftarrow \mathrm{L}_{i+1} + \dfrac{1}{u_i}\mathrm{L}_i$.
   Déterminer A_n, et en déduire que A est inversible. [S]
3. On considère le système $AX = Y$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
   On définit $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ par :
   – $y'_1 = y_1$.
   – Pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$, $y'_{i+1} = y_{i+1} + \dfrac{1}{u_i} y'_i$.
   Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, montrer que $AX = Y \Leftrightarrow A_i X = Y'_i$, avec $Y'_i = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. [S]
4. Dans cette question la colonne Y est définie par $\begin{cases} y_k = 1 \\ y_i = 0 \quad \text{si } i \neq k \end{cases}$
   (a) Avec les notations précédentes, calculer y'_i, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$. [S]
   (b) Déterminer alors la solution du système $AX = Y$. [S]
5. Déduire de ce qui précède l'expression de la matrice A^{-1}. [S]
6. On revient aux notations de la question 2.
   Déterminer deux matrices L et U telles que $A = LU$, où :
   – L est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux valent 1.
   – U est une matrice triangulaire supérieure.
   [S]
7. Calculer le déterminant Δ_n de la matrice A :
   (a) En utilisant le résultat de la question précédente. [S]
   (b) Par un calcul direct, utilisant une récurrence sur l'ordre n de la matrice A. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé du problème

1. On trouve $u_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $u_3 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $u_4 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$.

   Supposons que pour $n \geq 1$ donné on ait $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ (ce qui est le cas si $n = 1$).

   Alors $u_{n+1} = 2 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$. Par récurrence, on a donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n+1}{n}$. [Q]

2. Les lignes L_1 et L_2 de $A_1 = A$ s'écrivent : $\left(\begin{array}{c|cccccc} L_1 & u_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_2 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$

   Par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{u_1} L_1$, on obtient les deux premières lignes de A_2 :

   $$\left(\begin{array}{c|cccccc} L_1 & u_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_2 & 0 & 2 - \frac{1}{u_1} & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cccccc} L_1 & u_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_2 & 0 & u_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

   Les lignes L_1, L_2 et L_3 de A_2 s'écrivent : $\left(\begin{array}{c|ccccccc} L_1 & u_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ L_2 & 0 & u_2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_3 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$

   Par l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{u_2} L_2$, on obtient les trois premières lignes de A_3 :

   $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} L_1 & u_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ L_2 & 0 & u_2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_3 & 0 & 0 & 2 - \frac{1}{u_2} & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccccccc} L_1 & u_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ L_2 & 0 & u_2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_3 & 0 & 0 & u_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

   Cela se généralise facilement. Dans le passage de A_i à A_{i+1} on a en effet :

   $$\left(\begin{array}{c|ccccccccc} L_i & 0 & \dots & 0 & u_i & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{i+1} & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccccccccc} L_i & 0 & \dots & 0 & u_i & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{i+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & u_{i+1} & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

   Par une récurrence évidente, on obtient donc finalement :

   $$A_n = \begin{pmatrix} u_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-2} & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-1} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

   La matrice A_n est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

   De plus elle se déduit de A par une succession d'opérations élémentaires.

   Il en découle que les matrices A et A_n ont le même rang, c'est-à-dire n.

   Conclusion : la matrice A est inversible.

   Remarque : si on connait le théorème de Hadamard, on peut dire aussi que A est inversible car elle est à diagonale *strictement dominante*. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3. Pour tout i de $\{1,\dots,n-1\}$, Y'_{i+1} se déduit de Y'_i par l'opération $\mathrm{L}_{i+1} \leftarrow \mathrm{L}_{i+1} + \dfrac{1}{u_i}\mathrm{L}_i$.
C'est la même opération qui permet de passer de la matrice A_i à la matrice A_{i+1}.
Plus généralement, on passe de Y à Y'_i par la même succession d'opérations que celle qui permet de passer de A à A_i. Or toute succession d'opérations sur les lignes équivaut à la multiplication à gauche par une certaine matrice inversible.
Pour tout i de $\{1,\dots,n\}$, il existe donc une matrice inversible P_i telle que $\begin{cases} A_i = PA \\ Y'_i = P_iY \end{cases}$
On a alors $AX = Y \Leftrightarrow P_iAX = P_iY \Leftrightarrow A_iX = Y'_i$. [Q]

4. (a) ◇ Si $k \geq 2$, on a $y'_1 = y_1 = 0$. Si de plus $k \geq 3$, alors $y'_2 = y_2 + \dfrac{1}{u_1}y'_1 = y_2 = 0$.
Plus généralement, si $k \geq 2$ on constate que $y'_i = 0$ pour tout i de $\{1,\dots,k-1\}$.

◇ Si $k \geq 2$, on trouve $y'_k = y_k + \dfrac{y'_{k-1}}{u_{k-1}} = y_k = 1$.
Remarque : si $k = 1$, l'égalité $y'_k = 1$ est vraie par définition.

◇ Si $k < n$, on trouve $y'_{k+1} = y_{k+1} + \dfrac{y'_k}{u_k} = \dfrac{y'_k}{u_k} = \dfrac{1}{u_k} = \dfrac{k}{k+1}$.
Si de plus $k < n-1$ alors $y'_{k+2} = y_{k+2} + \dfrac{y'_{k+1}}{u_{k+1}} = \dfrac{y'_{k+1}}{u_{k+1}} = \dfrac{k}{k+1}\dfrac{k+1}{k+2} = \dfrac{k}{k+2}$.
Plus généralement, l'égalité $y'_i = \dfrac{k}{i}$ implique $y'_{i+1} = y_{i+1} + \dfrac{y'_i}{u_i} = \dfrac{k}{i}\dfrac{i}{i+1} = \dfrac{k}{i+1}$.
On en déduit que pour tout i de $\{k+1,\dots,n\}$, on a $y'_i = \dfrac{k}{i}$.

◇ Finalement, on peut énoncer : $\begin{cases} \forall\, i \in \{1,\dots,k-1\}, & y'_i = 0 \\ \forall\, i \in \{k,\dots,n\}, & y'_i = \dfrac{k}{i} \end{cases}$

[Q]

(b) On sait que le système $AX = Y$ équivaut à $A_nX = Y'_n$. Ce système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-2} & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-1} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/k \\ 1/(k+1) \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

On résout ce système en "remontant" de la dernière équation à la première.

◇ On trouve d'abord : $u_nx_n = \dfrac{k}{n}$ donc $x_n = \dfrac{k}{n}\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{k}{n+1}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

◇ Ensuite : $u_{n-1}x_{n-1} = x_n + \frac{k}{n-1} = \frac{2nk}{n^2-1}$ donc $x_{n-1} = \frac{2nk}{n^2-1}\frac{n-1}{n} = \frac{2k}{n+1}$.

◇ Ensuite : $u_{n-2}x_{n-2} = x_{n-1} + \frac{k}{n-2} = \frac{2k}{n+1} + \frac{k}{n-2} = \frac{3k(n-1)}{(n+1)(n-2)}$.

Donc $x_{n-2} = \frac{3k(n-1)}{(n+1)(n-2)}\frac{n-2}{n-1} = \frac{3k}{n+1}$ (à condition bien sûr d'avoir $n-2 \geq k$.)

Ce qui précède laisse supposer que pour $i \in \{k, \dots, n\}$ on a $x_i = \frac{(n-i+1)k}{n+1}$.

Cette relation est vraie si $i = n$, et si elle est vraie au rang $i+1$, alors (avec $i \geq k$) :

$$u_i x_i = x_{i+1} + \frac{k}{i} = \frac{(n-i)k}{n+1} + \frac{k}{i} = \frac{k(i+1)(n+1-i)}{i(n+1)}$$

On en déduit

$$x_i = \frac{k(i+1)(n+1-i)}{i(n+1)}\frac{i}{i+1} = \frac{(n+1-i)k}{n+1}$$

Cette récurrence finie donne donc : $\forall\, i \in \{k, \dots, n\},\ x_i = \frac{(n+1-i)k}{n+1}$.

En particulier $x_k = \frac{(n+1-k)k}{n+1}$.

On va continuer à "remonter" dans le système $A_n X = Y'_n$.

◇ On trouve d'abord $u_{k-1}x_{k-1} - x_k = 0$ donc $x_{k-1} = \frac{k-1}{k}\frac{(n+1-k)k}{n+1} = \frac{(n+1-k)(k-1)}{n+1}$.

◇ Ensuite $u_{k-2}x_{k-2} - x_{k-1} = 0$ donc $x_{k-2} = \frac{k-2}{k-1}\frac{(n+1-k)(k-1)}{n+1} = \frac{(n+1-k)(k-2)}{n+1}$.

◇ Un récurrence finie donne alors facilement : $\forall\, i \in \{1, \dots, k\},\ x_i = \frac{(n+1-k)i}{n+1}$.

[Q]

5. Avec les notations précédentes, la solution X_k s'écrit aussi $X_k = A^{-1}Y$, où Y est le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls, sauf le k-ième qui vaut 1.

Autrement dit X_k est la k-ième colonne de la matrice A^{-1}.

Le coefficient en position (i,k) dans A^{-1} peut s'écrire : $\frac{\big(n+1-\max(i,k)\big)\min(i,k)}{n+1}$.

On remarque que cette expression est symétrique par rapport au couple (i,k), ce qui est normal : tout comme A, la matrice A^{-1} est symétrique.

Voici donc l'expression de la matrice inverse de A (on a fait figurer, entre autres, les lignes

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

et colonnes d'indices k et $k+1$) :

$$A^{-1} = \frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n\cdot 1 & (n-1)1 & \dots & (n+1-k)1 & (n-k)1 & \dots & 2\cdot 1 & 1\cdot 1 \\ (n-1)1 & (n-1)2 & \dots & (n+1-k)2 & (n-k)2 & \dots & 2\cdot 2 & 1\cdot 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n+1-k)1 & (n+1-k)2 & \dots & (n+1-k)k & (n-k)k & \dots & 2\cdot k & 1\cdot k \\ (n-k)1 & (n-k)2 & \dots & (n-k)k & (n-k)(k+1) & \dots & 2(k+1) & 1(k+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & \dots & 2\cdot k & 2(k+1) & \dots & 2(n-1) & 1(n-1) \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & \dots & 1\cdot k & 1(k+1) & \dots & 1(n-1) & 1\cdot n \end{pmatrix}$$

[Q]

6. On sait qu'on passe de A_i à A_{i+1} par l'opération $\mathrm{L}_{i+1} \leftarrow \mathrm{L}_{i+1} + \frac{1}{u_i}\mathrm{L}_i$.
Cette opération correspond à la multiplication à gauche par une matrice inversible Q_i.
La matrice inverse de Q_i correspond à l'opération inverse $\mathrm{L}_{i+1} \leftarrow \mathrm{L}_{i+1} - \frac{1}{u_i}\mathrm{L}_i$.
On a donc $A_n = Q_n Q_{n-1} \dots Q_3 Q_2 A$. Ainsi $A = Q_2^{-1}Q_3^{-1}\dots Q_{n-1}^{-1}Q_n^{-1}A_n$.
La matrice $L = Q_2^{-1}Q_3^{-1}\dots Q_{n-1}^{-1}Q_n^{-1}$ s'écrit $L = Q_2^{-1}Q_3^{-1}\dots Q_{n-1}^{-1}Q_n^{-1}I_n$.
Autrement dit, L s'obtient en appliquant à I_n, successivement, les opérations :

$$\mathrm{L}_n \leftarrow \mathrm{L}_n - \frac{1}{u_{n-1}}\mathrm{L}_{n-1}, \text{ puis } \mathrm{L}_{n-1} \leftarrow \mathrm{L}_{n-1} - \frac{1}{u_{n-2}}\mathrm{L}_{n-2}, \text{ etc , et enfin } \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \frac{1}{u_1}\mathrm{L}_1$$

Ainsi la matrice L s'écrit : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{-1}{u_1} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-1}{u_2} & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{u_{n-2}} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{-1}{u_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$

En posant $U = A_n$, on a donc bien $A = LU$ où :
– U est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls.
– L est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux égaux à 1.
[Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

7. (a) Le déterminant de la matrice L est bien sûr égal à 1.

Quant au déterminant de U, il est égal au produit de ses coefficients diagonaux u_k.

Donc $\det A = \det U = \prod_{k=1}^{n} u_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1$. [Q]

(b) On développe le déterminant Δ_n de A par rapport à sa première ligne.

On obtient $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} + D_{n-1}$, où $D_{n-1} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

On développe D_{n-1} (d'ordre $n-1$) par rapport à sa colonne C_1 : $D_{n-1} = \Delta_{n-2}$.

On en déduit l'égalité $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$, pour tout $n \geq 3$.

Cette égalité signifie que la suite de terme général Δ_n est arithmétique.

Or $\Delta_1 = 2$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$.

On en déduit $\Delta_n = n+1$ pour tout entier $n \geq 1$.

[Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021