Inversion d'une matrice et décomposition LU

1. On pose $u_1 = 2$ et $\forall\, n \geq 1,\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.
   Calculer u_n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. [S]
2. On définit la matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
   On définit alors les matrices $A_1, A_2, \dots, A_n$ par :
   – $A_1 = A$.
   – Pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$, A_{i+1} se déduit de A_i par l'opération : $\mathrm{L}_{i+1} \leftarrow \mathrm{L}_{i+1} + \dfrac{1}{u_i}\mathrm{L}_i$.
   Déterminer A_n, et en déduire que A est inversible. [S]
3. On considère le système $AX = Y$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
   On définit $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ par :
   – $y'_1 = y_1$.
   – Pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$, $y'_{i+1} = y_{i+1} + \dfrac{1}{u_i} y'_i$.
   Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, montrer que $AX = Y \Leftrightarrow A_i X = Y'_i$, avec $Y'_i = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. [S]
4. Dans cette question la colonne Y est définie par $\begin{cases} y_k = 1 \\ y_i = 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$
   (a) Avec les notations précédentes, calculer y'_i, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$. [S]
   (b) Déterminer alors la solution du système $AX = Y$. [S]
5. Déduire de ce qui précède l'expression de la matrice A^{-1}. [S]
6. On revient aux notations de la question 2.
   Déterminer deux matrices L et U telles que $A = LU$, où :
   – L est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux valent 1.
   – U est une matrice triangulaire supérieure.
   [S]
7. Calculer le déterminant Δ_n de la matrice A :
   (a) En utilisant le résultat de la question précédente. [S]
   (b) Par un calcul direct, utilisant une récurrence sur l'ordre n de la matrice A. [S]

Corrigé du problème

1. On trouve $u_2 = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, $u_3 = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$, $u_4 = 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$.

   Supposons que pour $n \geq 1$ donné on ait $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ (ce qui est le cas si $n = 1$).

   Alors $u_{n+1} = 2 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$. Par récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n+1}{n}$. [Q]

2. Les lignes L_1 et L_2 de $A_1 = A$ s'écrivent : $\left(\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{L}_1 & u_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_2 & -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)$

   Par l'opération $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \frac{1}{u_1}\mathrm{L}_1$, on obtient les deux premières lignes de A_2 :

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{L}_1 & u_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_2 & 0 & 2 - \frac{1}{u_1} & -1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{L}_1 & u_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_2 & 0 & u_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)$$

   Les lignes L_1, L_2 et L_3 de A_2 s'écrivent : $\left(\begin{array}{c|ccccccc} \mathrm{L}_1 & u_1 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_2 & 0 & u_2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_3 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)$

   Par l'opération $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \frac{1}{u_2}\mathrm{L}_2$, on obtient les trois premières lignes de A_3 :

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} \mathrm{L}_1 & u_1 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_2 & 0 & u_2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_3 & 0 & 0 & 2 - \frac{1}{u_2} & -1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccccccc} \mathrm{L}_1 & u_1 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_2 & 0 & u_2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_3 & 0 & 0 & u_3 & -1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)$$

   Cela se généralise facilement. Dans le passage de A_i à A_{i+1} on a en effet :

$$\left(\begin{array}{c|cccccccccc} \mathrm{L}_i & 0 & \ldots & 0 & u_i & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_{i+1} & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|cccccccccc} \mathrm{L}_i & 0 & \ldots & 0 & u_i & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mathrm{L}_{i+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & u_{i+1} & -1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)$$

   Par une récurrence évidente, on obtient donc finalement :

$$A_n = \begin{pmatrix} u_1 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & u_2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-2} & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-1} & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

   La matrice A_n est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

   De plus elle se déduit de A par une succession d'opérations élémentaires.

   Il en découle que les matrices A et A_n ont le même rang, c'est-à-dire n.

   Conclusion : la matrice A est inversible.

   Remarque : si on connait le théorème de Hadamard, on peut dire aussi que A est inversible car elle est à diagonale *strictement dominante*. [Q]

3. Pour tout i de $\{1,\ldots,n-1\}$, Y'_{i+1} se déduit de Y'_i par l'opération $\mathrm{L}_{i+1} \leftarrow \mathrm{L}_{i+1} + \dfrac{1}{u_i}\mathrm{L}_i$.
C'est la même opération qui permet de passer de la matrice A_i à la matrice A_{i+1}.
Plus généralement, on passe de Y à Y'_i par la même succession d'opérations que celle qui permet de passer de A à A_i. Or toute succession d'opérations sur les lignes équivaut à la multiplication à gauche par une certaine matrice inversible.
Pour tout i de $\{1,\ldots,n\}$, il existe donc une matrice inversible P_i telle que $\begin{cases} A_i = PA \\ Y'_i = P_iY \end{cases}$
On a alors $AX = Y \Leftrightarrow P_iAX = P_iY \Leftrightarrow A_iX = Y'_i$. [Q]

4. (a) ◇ Si $k \geq 2$, on a $y'_1 = y_1 = 0$. Si de plus $k \geq 3$, alors $y'_2 = y_2 + \dfrac{1}{u_1}y'_1 = y_2 = 0$.
Plus généralement, si $k \geq 2$ on constate que $y'_i = 0$ pour tout i de $\{1,\ldots,k-1\}$.
◇ Si $k \geq 2$, on trouve $y'_k = y_k + \dfrac{y'_{k-1}}{u_{k-1}} = y_k = 1$.
Remarque : si $k = 1$, l'égalité $y'_k = 1$ est vraie par définition.
◇ Si $k < n$, on trouve $y'_{k+1} = y_{k+1} + \dfrac{y'_k}{u_k} = \dfrac{y'_k}{u_k} = \dfrac{1}{u_k} = \frac{k}{k+1}$.
Si de plus $k < n-1$ alors $y'_{k+2} = y_{k+2} + \dfrac{y'_{k+1}}{u_{k+1}} = \dfrac{y'_{k+1}}{u_{k+1}} = \frac{k}{k+1}\,\frac{k+1}{k+2} = \frac{k}{k+2}$.
Plus généralement, l'égalité $y'_i = \frac{k}{i}$ implique $y'_{i+1} = y_{i+1} + \dfrac{y'_i}{u_i} = \frac{k}{i}\,\frac{i}{i+1} = \frac{k}{i+1}$.
On en déduit que pour tout i de $\{k+1,\ldots,n\}$, on a $y'_i = \frac{k}{i}$.
◇ Finalement, on peut énoncer : $\begin{cases} \forall\, i \in \{1,\ldots,k-1\}, & y'_i = 0 \\ \forall\, i \in \{k,\ldots,n\}, & y'_i = \frac{k}{i} \end{cases}$
[Q]

(b) On sait que le système $AX = Y$ équivaut à $A_nX = Y'_n$. Ce système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u_1 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & u_2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-2} & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-1} & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/k \\ 1/(k+1) \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

On résout ce système en "remontant" de la dernière équation à la première.
◇ On trouve d'abord : $u_nx_n = \frac{k}{n}$ donc $x_n = \frac{k}{n}\,\frac{n}{n+1} = \frac{k}{n+1}$.

◇ Ensuite : $u_{n-1}x_{n-1} = x_n + \frac{k}{n-1} = \frac{2nk}{n^2-1}$ donc $x_{n-1} = \frac{2nk}{n^2-1}\,\frac{n-1}{n} = \frac{2k}{n+1}$.

◇ Ensuite : $u_{n-2}x_{n-2} = x_{n-1} + \frac{k}{n-2} = \frac{2k}{n+1} + \frac{k}{n-2} = \frac{3k(n-1)}{(n+1)(n-2)}$.

Donc $x_{n-2} = \frac{3k(n-1)}{(n+1)(n-2)}\,\frac{n-2}{n-1} = \frac{3k}{n+1}$ (à condition bien sûr d'avoir $n-2 \geq k$.)

Ce qui précède laisse supposer que pour $i \in \{k, \ldots, n\}$ on a $x_i = \frac{(n-i+1)k}{n+1}$.

Cette relation est vraie si $i = n$, et si elle est vraie au rang $i+1$, alors (avec $i \geq k$) :

$$u_i x_i = x_{i+1} + \frac{k}{i} = \frac{(n-i)k}{n+1} + \frac{k}{i} = \frac{k(i+1)(n+1-i)}{i(n+1)}$$

On en déduit

$$x_i = \frac{k(i+1)(n+1-i)}{i(n+1)}\,\frac{i}{i+1} = \frac{(n+1-i)k}{n+1}$$

Cette récurrence finie donne donc : $\forall\, i \in \{k, \ldots, n\},\ x_i = \frac{(n+1-i)k}{n+1}$.

En particulier $x_k = \frac{(n+1-k)k}{n+1}$.

On va continuer à "remonter" dans le système $A_n X = Y'_n$.

◇ On trouve d'abord $u_{k-1}x_{k-1} - x_k = 0$ donc $x_{k-1} = \frac{k-1}{k}\,\frac{(n+1-k)k}{n+1} = \frac{(n+1-k)(k-1)}{n+1}$.

◇ Ensuite $u_{k-2}x_{k-2} - x_{k-1} = 0$ donc $x_{k-2} = \frac{k-2}{k-1}\,\frac{(n+1-k)(k-1)}{n+1} = \frac{(n+1-k)(k-2)}{n+1}$.

◇ Un récurrence finie donne alors facilement : $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\},\ x_i = \frac{(n+1-k)i}{n+1}$.

[Q]

5. Avec les notations précédentes, la solution X_k s'écrit aussi $X_k = A^{-1}Y$, où Y est le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls, sauf le k-ième qui vaut 1.

   Autrement dit X_k est la k-ième colonne de la matrice A^{-1}.

   Le coefficient en position (i, k) dans A^{-1} peut s'écrire : $\frac{\bigl(n+1-\max(i,k)\bigr)\min(i,k)}{n+1}$.

   On remarque que cette expression est symétrique par rapport au couple (i, k), ce qui est normal : tout comme A, la matrice A^{-1} est symétrique.

   Voici donc l'expression de la matrice inverse de A (on a fait figurer, entre autres, les lignes et colonnes d'indices k et $k+1$) :

$$A^{-1}=\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n\cdot 1 & (n-1)1 & \dots & (n+1-k)1 & (n-k)1 & \dots & 2\cdot 1 & 1\cdot 1\\ (n-1)1 & (n-1)2 & \dots & (n+1-k)2 & (n-k)2 & \dots & 2\cdot 2 & 1\cdot 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (n+1-k)1 & (n+1-k)2 & \dots & (n+1-k)k & (n-k)k & \dots & 2\cdot k & 1\cdot k\\ (n-k)1 & (n-k)2 & \dots & (n-k)k & (n-k)(k+1) & \dots & 2(k+1) & 1(k+1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & \dots & 2\cdot k & 2(k+1) & \dots & 2(n-1) & 1(n-1)\\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & \dots & 1\cdot k & 1(k+1) & \dots & 1(n-1) & 1\cdot n \end{pmatrix}$$

[Q]

6. On sait qu'on passe de A_i à A_{i+1} par l'opération $\mathrm{L}_{i+1}\leftarrow \mathrm{L}_{i+1}+\dfrac{1}{u_i}\mathrm{L}_i$.
   Cette opération correspond à la multiplication à gauche par une matrice inversible Q_i.
   La matrice inverse de Q_i correspond à l'opération inverse $\mathrm{L}_{i+1}\leftarrow \mathrm{L}_{i+1}-\dfrac{1}{u_i}\mathrm{L}_i$.
   On a donc $A_n=Q_nQ_{n-1}\dots Q_3Q_2A$. Ainsi $A=Q_2^{-1}Q_3^{-1}\dots Q_{n-1}^{-1}Q_n^{-1}A_n$.
   La matrice $L=Q_2^{-1}Q_3^{-1}\dots Q_{n-1}^{-1}Q_n^{-1}$ s'écrit $L=Q_2^{-1}Q_3^{-1}\dots Q_{n-1}^{-1}Q_n^{-1}I_n$.
   Autrement dit, L s'obtient en appliquant à I_n, successivement, les opérations :

$$\mathrm{L}_n\leftarrow \mathrm{L}_n-\frac{1}{u_{n-1}}\mathrm{L}_{n-1},\ \text{puis } \mathrm{L}_{n-1}\leftarrow \mathrm{L}_{n-1}-\frac{1}{u_{n-2}}\mathrm{L}_{n-2},\ \text{etc , et enfin } \mathrm{L}_2\leftarrow \mathrm{L}_2-\frac{1}{u_1}\mathrm{L}_1$$

   Ainsi la matrice L s'écrit : $L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\ \frac{-1}{u_1} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \frac{-1}{u_2} & 1 & 0 & \dots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{u_{n-2}} & 1 & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{-1}{u_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$

   En posant $U=A_n$, on a donc bien $A=LU$ où :
   - U est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls.
   - L est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

   [Q]

7. (a) Le déterminant de la matrice L est bien sûr égal à 1.

Quant au déterminant de U, il est égal au produit de ses coefficients diagonaux u_k.

Donc $\det A = \det U = \prod_{k=1}^{n} u_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1$. [Q]

(b) On développe le déterminant Δ_n de A par rapport à sa première ligne.

On obtient $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} + D_{n-1}$, où $D_{n-1} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

On développe D_{n-1} (d'ordre $n-1$) par rapport à sa colonne C_1 : $D_{n-1} = \Delta_{n-2}$.

On en déduit l'égalité $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$, pour tout $n \geq 3$.

Cette égalité signifie que la suite de terme général Δ_n est arithmétique.

Or $\Delta_1 = 2$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$.

On en déduit $\Delta_n = n+1$ pour tout entier $n \geq 1$.
[Q]