

Inversion d'une matrice et décomposition LU

- On pose $u_1 = 2$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.
Calculer u_n , pour tout n de \mathbb{N}^* . [S]
- On définit la matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
On définit alors les matrices A_1, A_2, \dots, A_n par :
 - $A_1 = A$.
 - Pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$, A_{i+1} se déduit de A_i par l'opération : $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + \frac{1}{u_i} L_i$.
 Déterminer A_n , et en déduire que A est inversible. [S]
- On considère le système $AX = Y$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
On définit y'_1, y'_2, \dots, y'_n par :
 - $y'_1 = y_1$.
 - Pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$, $y'_{i+1} = y_{i+1} + \frac{1}{u_i} y'_i$.
 Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, montrer que $AX = Y \Leftrightarrow A_i X = Y'_i$, avec $Y'_i = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. [S]
- Dans cette question la colonne Y est définie par $\begin{cases} y_k = 1 \\ y_i = 0 \end{cases}$ si $i \neq k$
 - Avec les notations précédentes, calculer y'_i , pour tout i de $\{1, \dots, n\}$. [S]
 - Déterminer alors la solution du système $AX = Y$. [S]
- Déduire de ce qui précède l'expression de la matrice A^{-1} . [S]
- On revient aux notations de la question 2.
Déterminer deux matrices L et U telles que $A = LU$, où :
 - L est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux valent 1.
 - U est une matrice triangulaire supérieure.
 [S]
- Calculer le déterminant Δ_n de la matrice A :
 - En utilisant le résultat de la question précédente. [S]
 - Par un calcul direct, utilisant une récurrence sur l'ordre n de la matrice A . [S]

Corrigé du problème

1. On trouve $u_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $u_3 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $u_4 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$.

Supposons que pour $n \geq 1$ donné on ait $u_n = \frac{n+1}{n}$ (ce qui est le cas si $n = 1$).

Alors $u_{n+1} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$. Par récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n+1}{n}$. [Q]

2. Les lignes L_1 et L_2 de $A_1 = A$ s'écrivent :
$$\left(\begin{array}{c|cccccc} L_1 & u_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_2 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{u_1}L_1$, on obtient les deux premières lignes de A_2 :

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} L_1 & u_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_2 & 0 & 2 - \frac{1}{u_1} & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cccccc} L_1 & u_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_2 & 0 & u_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Les lignes L_1 , L_2 et L_3 de A_2 s'écrivent :
$$\left(\begin{array}{c|cccccc} L_1 & u_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_2 & 0 & u_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ L_3 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Par l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{u_2}L_2$, on obtient les trois premières lignes de A_3 :

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} L_1 & u_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_2 & 0 & u_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ L_3 & 0 & 0 & 2 - \frac{1}{u_2} & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cccccc} L_1 & u_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ L_2 & 0 & u_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ L_3 & 0 & 0 & u_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Cela se généralise facilement. Dans le passage de A_i à A_{i+1} on a en effet :

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} L_i & 0 & \dots & 0 & u_i & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{i+1} & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|cccccc} L_i & 0 & \dots & 0 & u_i & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{i+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & u_{i+1} & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Par une récurrence évidente, on obtient donc finalement :

$$A_n = \left(\begin{array}{c|cccccc} u_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-2} & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-1} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & u_n \end{array} \right)$$

La matrice A_n est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

De plus elle se déduit de A par une succession d'opérations élémentaires.

Il en découle que les matrices A et A_n ont le même rang, c'est-à-dire n .

Conclusion : la matrice A est inversible.

Remarque : si on connaît le théorème de Hadamard, on peut dire aussi que A est inversible car elle est à diagonale *strictement dominante*. [Q]

3. Pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$, Y'_{i+1} se déduit de Y'_i par l'opération $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + \frac{1}{u_i}L_i$.

C'est la même opération qui permet de passer de la matrice A_i à la matrice A_{i+1} .

Plus généralement, on passe de Y à Y'_i par la même succession d'opérations que celle qui permet de passer de A à A_i . Or toute succession d'opérations sur les lignes équivaut à la multiplication à gauche par une certaine matrice inversible.

Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, il existe donc une matrice inversible P_i telle que $\begin{cases} A_i = PA \\ Y'_i = P_i Y \end{cases}$

On a alors $AX = Y \Leftrightarrow P_i AX = P_i Y \Leftrightarrow A_i X = Y'_i$. [Q]

4. (a) \diamond Si $k \geq 2$, on a $y'_1 = y_1 = 0$. Si de plus $k \geq 3$, alors $y'_2 = y_2 + \frac{1}{u_1}y'_1 = y_2 = 0$.

Plus généralement, si $k \geq 2$ on constate que $y'_i = 0$ pour tout i de $\{1, \dots, k-1\}$.

\diamond Si $k \geq 2$, on trouve $y'_k = y_k + \frac{y'_{k-1}}{u_{k-1}} = y_k = 1$.

Remarque : si $k = 1$, l'égalité $y'_k = 1$ est vraie par définition.

\diamond Si $k < n$, on trouve $y'_{k+1} = y_{k+1} + \frac{y'_k}{u_k} = \frac{y'_k}{u_k} = \frac{1}{u_k} = \frac{k}{k+1}$.

Si de plus $k < n-1$ alors $y'_{k+2} = y_{k+2} + \frac{y'_{k+1}}{u_{k+1}} = \frac{y'_{k+1}}{u_{k+1}} = \frac{k}{k+1} \frac{k+1}{k+2} = \frac{k}{k+2}$.

Plus généralement, l'égalité $y'_i = \frac{k}{i}$ implique $y'_{i+1} = y_{i+1} + \frac{y'_i}{u_i} = \frac{k}{i} \frac{i}{i+1} = \frac{k}{i+1}$.

On en déduit que pour tout i de $\{k+1, \dots, n\}$, on a $y'_i = \frac{k}{i}$.

\diamond Finalement, on peut énoncer : $\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, k-1\}, & y'_i = 0 \\ \forall i \in \{k, \dots, n\}, & y'_i = \frac{k}{i} \end{cases}$

[Q]

(b) On sait que le système $AX = Y$ équivaut à $A_n X = Y'_n$. Ce système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-2} & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-1} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/k \\ 1/(k+1) \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

On résout ce système en "remontant" de la dernière équation à la première.

\diamond On trouve d'abord : $u_n x_n = \frac{k}{n}$ donc $x_n = \frac{k}{n} \frac{n}{n+1} = \frac{k}{n+1}$.

$$\diamond \text{ Ensuite : } u_{n-1}x_{n-1} = x_n + \frac{k}{n-1} = \frac{2nk}{n^2-1} \text{ donc } x_{n-1} = \frac{2nk}{n^2-1} \frac{n-1}{n} = \frac{2k}{n+1}.$$

$$\diamond \text{ Ensuite : } u_{n-2}x_{n-2} = x_{n-1} + \frac{k}{n-2} = \frac{2k}{n+1} + \frac{k}{n-2} = \frac{3k(n-1)}{(n+1)(n-2)}.$$

$$\text{Donc } x_{n-2} = \frac{3k(n-1)}{(n+1)(n-2)} \frac{n-2}{n-1} = \frac{3k}{n+1} \text{ (à condition bien sûr d'avoir } n-2 \geq k.)$$

Ce qui précède laisse supposer que pour $i \in \{k, \dots, n\}$ on a $x_i = \frac{(n-i+1)k}{n+1}$.

Cette relation est vraie si $i = n$, et si elle est vraie au rang $i + 1$, alors (avec $i \geq k$) :

$$u_i x_i = x_{i+1} + \frac{k}{i} = \frac{(n-i)k}{n+1} + \frac{k}{i} = \frac{k(i+1)(n+1-i)}{i(n+1)}$$

On en déduit

$$x_i = \frac{k(i+1)(n+1-i)}{i(n+1)} \frac{i}{i+1} = \frac{(n+1-i)k}{n+1}$$

Cette récurrence finie donne donc : $\forall i \in \{k, \dots, n\}$, $x_i = \frac{(n+1-i)k}{n+1}$.

En particulier $x_k = \frac{(n+1-k)k}{n+1}$.

On va continuer à "remonter" dans le système $A_n X = Y'_n$.

$$\diamond \text{ On trouve d'abord } u_{k-1}x_{k-1} - x_k = 0 \text{ donc } x_{k-1} = \frac{k-1}{k} \frac{(n+1-k)k}{n+1} = \frac{(n+1-k)(k-1)}{n+1}.$$

$$\diamond \text{ Ensuite } u_{k-2}x_{k-2} - x_{k-1} = 0 \text{ donc } x_{k-2} = \frac{k-2}{k-1} \frac{(n+1-k)(k-1)}{n+1} = \frac{(n+1-k)(k-2)}{n+1}.$$

$$\diamond \text{ Une récurrence finie donne alors facilement : } \forall i \in \{1, \dots, k\}, x_i = \frac{(n+1-k)i}{n+1}.$$

[Q]

5. Avec les notations précédentes, la solution X_k s'écrit aussi $X_k = A^{-1}Y$, où Y est le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls, sauf le k -ième qui vaut 1.

Autrement dit X_k est la k -ième colonne de la matrice A^{-1} .

Le coefficient en position (i, k) dans A^{-1} peut s'écrire : $\frac{(n+1-\max(i,k))\min(i,k)}{n+1}$.

On remarque que cette expression est symétrique par rapport au couple (i, k) , ce qui est normal : tout comme A , la matrice A^{-1} est symétrique.

Voici donc l'expression de la matrice inverse de A (on a fait figurer, entre autres, les lignes

et colonnes d'indices k et $k + 1$) :

$$A^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n \cdot 1 & (n-1)1 & \dots & (n+1-k)1 & (n-k)1 & \dots & 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 \\ (n-1)1 & (n-1)2 & \dots & (n+1-k)2 & (n-k)2 & \dots & 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n+1-k)1 & (n+1-k)2 & \dots & (n+1-k)k & (n-k)k & \dots & 2 \cdot k & 1 \cdot k \\ (n-k)1 & (n-k)2 & \dots & (n-k)k & (n-k)(k+1) & \dots & 2(k+1) & 1(k+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & \dots & 2 \cdot k & 2(k+1) & \dots & 2(n-1) & 1(n-1) \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & \dots & 1 \cdot k & 1(k+1) & \dots & 1(n-1) & 1 \cdot n \end{pmatrix}$$

[Q]

6. On sait qu'on passe de A_i à A_{i+1} par l'opération $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + \frac{1}{u_i}L_i$.

Cette opération correspond à la multiplication à gauche par une matrice inversible Q_i .

La matrice inverse de Q_i correspond à l'opération inverse $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} - \frac{1}{u_i}L_i$.

On a donc $A_n = Q_n Q_{n-1} \dots Q_3 Q_2 A$. Ainsi $A = Q_2^{-1} Q_3^{-1} \dots Q_{n-1}^{-1} Q_n^{-1} A_n$.

La matrice $L = Q_2^{-1} Q_3^{-1} \dots Q_{n-1}^{-1} Q_n^{-1}$ s'écrit $L = Q_2^{-1} Q_3^{-1} \dots Q_{n-1}^{-1} Q_n^{-1} I_n$.

Autrement dit, L s'obtient en appliquant à I_n , successivement, les opérations :

$$L_n \leftarrow L_n - \frac{1}{u_{n-1}}L_{n-1}, \text{ puis } L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - \frac{1}{u_{n-2}}L_{n-2}, \text{ etc, et enfin } L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{u_1}L_1$$

Ainsi la matrice L s'écrit : $L =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{-1}{u_1} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-1}{u_2} & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{u_{n-2}} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{-1}{u_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $U = A_n$, on a donc bien $A = LU$ où :

- U est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls.
- L est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

[Q]



7. (a) Le déterminant de la matrice L est bien sûr égal à 1.

Quant au déterminant de U , il est égal au produit de ses coefficients diagonaux u_k .

$$\text{Donc } \det A = \det U = \prod_{k=1}^n u_k = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = n + 1. \quad [\text{Q}]$$

(b) On développe le déterminant Δ_n de A par rapport à sa première ligne.

On obtient $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} + D_{n-1}$, où $D_{n-1} =$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

On développe D_{n-1} (d'ordre $n - 1$) par rapport à sa colonne C_1 : $D_{n-1} = \Delta_{n-2}$.

On en déduit l'égalité $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$, pour tout $n \geq 3$.

Cette égalité signifie que la suite de terme général Δ_n est arithmétique.

$$\text{Or } \Delta_1 = 2 \text{ et } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

On en déduit $\Delta_n = n + 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

[Q]