

Une famille de matrices orthogonales

L'espace vectoriel \mathbb{R}^3 est rapporté à la base canonique (e_1, e_2, e_3) .

On donne quatre réels a, b, c, k tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $k \neq 0$.

On désigne par I la matrice identité d'ordre 3.

Soit f le morphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $T = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

PREMIERE PARTIE

1. Calculer T^2 . Exprimer T^3 en fonction de T . [S]
2. Trouver le rang de f et déterminer son noyau. [S]
3. Montrer que la matrice $B_k = kI + T$ est inversible. [S]
4. Montrer qu'il existe trois réels u, v, w , dépendants de k , tels que $B_k^{-1} = uI + vT + wT^2$. [S]
5. En déduire que les matrices $(kI + T)^{-1}$ et $kI - T$ commutent. [S]

DEUXIEME PARTIE

On note g_k l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $A_k = (kI + T)^{-1}(kI - T)$ dans la base canonique.

1. Quels sont les vecteurs x de \mathbb{R}^3 tels que $g_k(x) = x$? [S]
2. Montrer que A_k est inversible et que $A_k^{-1} = {}^t A_k = A_{-k}$. [S]
3. Montrer que $I + A_k$ est inversible et que $T = k(I - A_k)(I + A_k)^{-1}$. [S]
4. Ecrire explicitement la matrice A_k en fonction de I, k, T, T^2 . [S]
5. On pose $k = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})$, avec $-\pi < \theta < \pi$.
 - (a) On suppose d'abord $a = 1$ et $b = c = 0$.
Identifier g_k à une transformation géométrique simple. [S]
 - (b) On suppose $(b, c) \neq (0, 0)$. Montrer que les vecteurs $u_1 = (a, b, c)$, $u_2 = f(e_1)$ et $u_3 = -f^2(e_1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 . [S]
 - (c) Quelles sont les matrices \tilde{T} et \tilde{A}_k de f et de g_k dans cette base? [S]
 - (d) Soient k_1 et k_2 deux réels non nuls tels que $(k_1 + k_2)(1 - k_1 k_2) \neq 0$.
Montrer qu'il existe un réel non nul k tel que $g_k = g_{k_1} \circ g_{k_2}$.
Exprimer k en fonction de k_1 et de k_2 . [S]

Corrigé du problème

PREMIERE PARTIE

1. On trouve $T^2 = \begin{pmatrix} -b^2 - c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2 - c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2 - b^2 \end{pmatrix}$.

De même, en utilisant l'égalité $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -(a^2 + b^2 + c^2)c & (a^2 + b^2 + c^2)b \\ (a^2 + b^2 + c^2)c & 0 & -(a^2 + b^2 + c^2)a \\ -(a^2 + b^2 + c^2)b & (a^2 + b^2 + c^2)a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = -T$$

[Q]

2. Pour tout vecteur $u = (x, y, z)$, $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy - bz \\ -cx + az \\ bx - ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Connaissant les propriétés du produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 , on en déduit que :

$$f(u) = 0 \iff u \text{ est lié au vecteur } \omega = (a, b, c).$$

Le noyau de f est donc la droite vectorielle engendrée par (a, b, c) .

On en déduit que le rang de f est 2 : en effet $\dim \mathbb{R}^3 = \text{rg}(f) + \dim \ker f$.

Mais $f(u) = u \wedge (a, b, c) \Rightarrow \text{Im} f$ est inclus dans le plan orthogonal à (a, b, c) .

Pour des raisons de dimension, $\text{Im} f$ est donc le plan orthogonal à (a, b, c) , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $u = (x, y, z)$ tels que $ax + by + cz = 0$.

Remarque : L'interprétation vectorielle de la matrice T permet une nouvelle démonstration de l'égalité $T^3 = -T$. Il suffit en effet de vérifier que $f^3 = -f$.

Or pour tout vecteur u de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} f^2(u) &= f(u) \wedge \omega = (u \wedge \omega) \wedge \omega = \omega \wedge (\omega \wedge u) \\ &= (\omega \cdot u)\omega - (\omega \cdot \omega)u = (\omega \cdot u)\omega - u \quad (\text{car } \omega \text{ est unitaire}) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$f^3(u) = ((\omega \cdot u)\omega - u) \wedge \omega = -u \wedge \omega = -f(u). \quad [\text{Q}]$$

3. On vérifie que $\det(B_k) = \begin{vmatrix} k & c & -b \\ -c & k & a \\ b & -a & k \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + k^2)k = (1 + k^2)k \neq 0$.

On en déduit que B_k est inversible.

Il y a une deuxième démonstration qui consiste à vérifier que $f_k = f + k \text{Id}$ est injective (donc est un automorphisme de \mathbb{R}^3).

Soit u un vecteur de $\ker f_k$: $f_k(u) = \vec{0} \iff u \wedge \omega + ku = \vec{0}$.

Si on multiplie scalairement cette égalité par u , on trouve $k \|u\|^2 = 0$ et donc $u = 0$. [Q]

4. Il suffit de trouver trois réels u, v, w tels que $(uI + vT + wT^2)B_k = I$.

$$\begin{aligned} (uI + vT + wT^2)B_k = I &\iff (uI + vT + wT^2)(kI + T) = I \\ &\iff kuI + (u + kv)T + (v + kw)T^2 + wT^3 = I \\ &\iff kuI + (u + kv - w)T + (v + kw)T^2 = I \end{aligned}$$

L'égalité est réalisée si $\begin{cases} ku = 1 \\ u + kv - w = 0 \\ v + kw = 0 \end{cases}$ donc si $\begin{cases} u = \frac{1}{k} \\ v = -\frac{1}{k^2+1} \\ w = \frac{1}{k(k^2+1)} \end{cases}$

Conclusion : on a $B_k^{-1} = \frac{1}{k}I - \frac{1}{k^2+1}T + \frac{1}{k(k^2+1)}T^2$.

Il y a une autre méthode, qui utilise l'égalité $T^3 = -T$.

En effet $T = B_k - kI$ et :

$$\begin{aligned} T^3 = -T &\Rightarrow (B_k - kI)^3 = kI - B_k \Rightarrow B_k^3 - 3kB_k^2 + 3k^2B_k - k^3I = kI - B_k \\ &\Rightarrow B_k(B_k^2 - 3kB_k + (3k^2 + 1)I) = k(k^2 + 1)I \end{aligned}$$

Ce calcul montre que B_k est inversible, avec :

$$\begin{aligned} B_k^{-1} &= \frac{1}{k(k^2+1)}(B_k^2 - 3kB_k + (3k^2 + 1)I) \\ &= \frac{1}{k(k^2+1)}((T + kI)^2 - 3k(T + kI) + (3k^2 + 1)I) \quad [Q] \\ &= \frac{1}{k(k^2+1)}(T^2 - kT + (k^2 + 1)I) = \frac{1}{k}I - \frac{1}{k^2+1}T + \frac{1}{k(k^2+1)}T^2 \end{aligned}$$

5. Les matrices $B_k^{-1} = (kI + T)^{-1}$ et $kI - T$ sont des combinaisons linéaires des matrices I, T et T^2 qui commutent entre elles deux à deux.

On en déduit que les matrices $(kI + T)^{-1}$ et $kI - T$ commutent. [Q]

DEUXIEME PARTIE

On note g_k l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $A_k = (kI + T)^{-1}(kI - T)$ dans la base canonique.

1. Soit x un vecteur de \mathbb{R}^3 et X la matrice colonne associée :

$$\begin{aligned} g_k(x) = x &\iff A_k X = X \iff (kI + T)^{-1}(kI - T)X = X \\ &\iff (kI - T)X = (kI + T)X \iff TX = 0 \iff x \in \ker f \end{aligned}$$

On obtient donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire $\omega = (a, b, c)$. [Q]

2. La matrice T est antisymétrique.

On en déduit, en se souvenant que $(kI + T)^{-1}$ et $kI - T$ commutent :

$$\begin{aligned} {}^T A_k &= {}^T(kI - T) {}^T(kI + T)^{-1} = (kI + T)(kI - T)^{-1} = ((kI + T)^{-1}(kI - T))^{-1} = A_k^{-1}. \\ \text{De même } A_{-k} &= (-kI + T)^{-1}(-kI - T) = (kI - T)^{-1}(kI + T) = (kI + T)(kI - T)^{-1} = {}^T A_k. \end{aligned}$$

[Q]

3. Pour toute matrice colonne X ,

$$\begin{aligned} (I + A_k)X = 0 &\iff A_k X = -X \iff (kI + T)^{-1}(kI - T)X = -X \\ &\iff (kI - T)X = -(kI + T)X \iff 2kX = 0 \iff X = 0 \end{aligned}$$

Le "noyau" de $I + A_k$ est donc réduit à 0 : cette matrice est inversible.

Par définition de A_k , on a : $(kI + T)A_k = kI - T$ et donc $T(A_k + I) = k(I - A_k)$.

Compte tenu de l'inversibilité de $(A_k + I)$, on trouve $T = k(I - A_k)(I + A_k)^{-1}$. [Q]

4. Après développement et simplification, en utilisant $T^3 = -T$, on trouve :

$$A_k = B_k^{-1}(kI - T) = \left[\frac{1}{k}I - \frac{1}{k^2 + 1}T + \frac{1}{k(k^2 + 1)}T^2 \right](kI - T) = I - \frac{2k}{k^2 + 1}T + \frac{2}{k^2 + 1}T^2$$

[Q]

5. (a) Pour tous a, b, c , et avec cette définition de k , on a :

$$k = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}}, \quad \frac{2}{k^2 + 1} = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = 1 + \cos(\pi - \theta) = 1 - \cos \theta$$

$$\frac{2k}{k^2 + 1} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta.$$

On en déduit $A_k = I - (\sin \theta)T + (1 - \cos \theta)T^2$.

$$\text{Avec } a = 1 \text{ et } b = c = 0, \text{ on trouve } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit : } A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

g_k est donc la rotation d'angle θ autour du vecteur e_1 . [Q]

$$(b) \text{ La matrice de } u_1, u_2, u_3 \text{ dans la base } e_1, e_2, e_3 \text{ est } M = \begin{pmatrix} a & 0 & b^2 + c^2 \\ b & -c & -ab \\ c & b & -ac \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est :

$$a(ac^2 + ab^2) + (b^2 + c^2)(b^2 + c^2) = (b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2) = b^2 + c^2 \neq 0.$$

On en déduit que les vecteurs u_1, u_2, u_3 forment une base de \mathbb{R}^3 . [Q]

(c) On sait que $f(u_1) = 0$.

D'autre part $f(u_2) = f^2(e_1) = -u_3$ et $f(u_3) = -f^3(e_1) = f(e_1) = u_2$.

$$\text{La matrice de } f \text{ dans la base } u_1, u_2, u_3 \text{ est donc : } \tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On se retrouve ramené au cas précédent : } \tilde{A}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad [Q]$$

(d) La base u_1, u_2, u_3 utilisée précédemment ne dépend pas de k .

Pour répondre à cette question, il suffit donc de trouver θ tel que $\tilde{A}_k = \tilde{A}_{k_1} \tilde{A}_{k_2}$.

Or de manière évidente, et en notant θ_1 et θ_2 les angles associés à k_1 et k_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{k_1} \tilde{A}_{k_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Autrement dit, $\tilde{A}_{k_1} \tilde{A}_{k_2} = \tilde{A}_k$, où k est donné par $k = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2))$.

Notons pour simplifier $t_1 = \tan \frac{\theta_1}{2}$ et $t_2 = \tan \frac{\theta_2}{2}$.

$$\text{On trouve : } k = \frac{1}{\tan(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2})} = \frac{1 - t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{1 - \frac{1}{k_1 k_2}}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \frac{k_1 k_2 - 1}{k_1 + k_2}.$$

Pour cette valeur de k , on a bien $g_k = g_{k_1} \circ g_{k_2}$. [Q]

Remarque :

Revenons au début de la question 5.

En termes d'applications linéaires : $g_k = \text{Id} - (\sin \theta)f + (1 - \cos \theta)f^2$.

Donc pour tout vecteur x :

$$\begin{aligned} g_k(x) &= x - \sin \theta(x \wedge \omega) + (1 - \cos \theta)((\omega \cdot x)\omega - x) \\ &= (\cos \theta)x + (\sin \theta)\omega \wedge x + (1 - \cos \theta)(\omega \cdot x)\omega \end{aligned}$$

Notons $p(x) = (\omega \cdot x)\omega$ la projection orthogonale de x sur le vecteur unitaire ω .

$$g_k(x) = (\cos \theta)(x - p(x)) + (\sin \theta)\omega \wedge x + p(x).$$

Notons $q(x) = (\cos \theta)(x - p(x)) + (\sin \theta)\omega \wedge x$. Ainsi $g_k(x) = q(x) + p(x)$.

On en déduit que g_k est la rotation d'angle θ autour du vecteur ω (voir figure).

Il est donc normal que la composée de g_{k_1} (rotation d'angle θ_1 autour de ω) et de g_{k_2} (rotation d'angle θ_2 autour de ω) soit la rotation d'angle $\theta = \theta_1 + \theta_2$ autour de ω .

