Translatées d'une application

On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

– Pour toute application f de E et pour tout réel t, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f_t(x) = f(x+t)$.
  On dit que l'application f_t, qui appartient à E, est une *translatée* de f.

– On note E_f le sous-espace de E engendré par les f_t, c'est-à-dire l'ensemble des applications g de E qui peuvent s'écrire au moins d'une manière sous la forme $g = \lambda_1 f_{t_1} + \lambda_2 f_{t_2} + \cdots + \lambda_p f_{t_p}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ et $t_1, t_2, \ldots, t_p$ sont des familles de p réels quelconques (p étant lui même un entier positif quelconque).

1. Dans chacun des cas suivants, vérifier que E_f est de dimension finie et en donner une base formée de fonctions du type f_t :
   (a) L'application f est définie par : $f(x) = \exp(x)$ [S]
   (b) L'application f est définie par : $f(x) = \sin x$ [S]
   (c) L'application f est définie par : $f(x) = x$. [S]
2. Montrer que si f est de la forme $x \to f(x) = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, où P est un polynôme et α un réel, alors E_f est de dimension finie. [S]
3. On suppose que f est définie par $f(x) = \exp(\exp x)$.
   Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, les fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n$ forment une famille libre. Qu'en déduit-on pour le sous-espace E_f ? [S]
4. Dans cette question, on caractérise les familles libres finies de E à l'aide d'un déterminant.
   (a) Soit g_1, g_2 une famille libre de E. Montrer qu'on peut trouver deux réels distincts a_1 et a_2 tels que le déterminant $\begin{vmatrix} g_1(a_1) & g_1(a_2) \\ g_2(a_1) & g_2(a_2) \end{vmatrix}$ soit non nul. [S]
   (b) Montrer plus généralement que si $g_1, g_2, \ldots, g_n$ est une famille libre de E, on peut trouver n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distincts deux à deux, tels que le déterminant Δ_n, carré d'ordre n et de terme général $\delta_{ij} = g_i(a_j)$, soit non nul. [S]
5. Soit f un élément de E, tel que $\dim(E_f) = n \geq 1$. Soit $g_1, \ldots, g_n$ une base de E_f.
   (a) Montrer qu'il existe une unique suite $h_1, \ldots, h_n$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
   $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, f(x+t) = h_1(t)g_1(x) + h_2(t)g_2(x) + \cdots + h_n(t)g_n(x)$. [S]
   (b) Montrer qu'on peut trouver n réels $a_1, \ldots, a_n$ distincts deux à deux tels que pour tout j de $\{1, \ldots, n\}$, h_j soit combinaison linéaire de $f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}$.
   Indication : utiliser 4b et considérer un certain système de Cramer.
   En conclure que $h_1, h_2, \ldots, h_n$ appartiennent à E_f. [S]
   (c) Montrer que les dérivées successives de f sont dans E_f (utiliser 5a.)
   En déduire que f satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants. [S]
6. Trouver tous les éléments f de E tels que $\dim E_f \leq 2$. [S]

Corrigé du problème

1. (a) Soit g un élément de E_f.

   Il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et $t_1, \ldots, t_p$ tels que $g = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_{t_k}$ c'est-à-dire tels que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

   $g(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \exp(t_k+x) = \Big(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \exp(t_k)\Big) \exp(x) = \mu f(x)$, avec $\mu = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \exp(t_k)$.

   Tout élément de E_f est donc un multiple de f.

   La réciproque est évidente puisque $f = f_0$.

   On en déduit que $\dim E_f = 1$ et que $E_f = \mathbb{R} f$. [Q]

   (b) Pour tous réels t et x, on a :

   $f_t(x) = \sin(t+x) = \cos(t)\sin(x) + \sin(t)\cos(x) = \cos(t)\sin(x) + \sin(t)\sin(x + \frac{\pi}{2})$.

   Autrement dit : $f_t = \cos(t) f_0 + \sin(t) f_{\pi/2}$.

   Toute combinaison linéaire des fonctions f_t, c'est-à-dire tout élément de E_f, est donc combinaison linéaire de f_0 et de $f_{\pi/2}$. La réciproque est évidente.

   Les fonctions f_0 et $f_{\pi/2}$ sont évidemment linéairement indépendantes.

   On en déduit que $E_f = \text{vect}\{f_0, f_{\pi/2}\}$ et que $\dim E_f = 2$. [Q]

   (c) Pour tous réels t et x, on a : $f_t(x) = t+x = (1-t)x + t(x+1) = (1-t)f_0(x) + t f_1(x)$.

   Autrement dit : $f_t = (1-t)f_0 + t f_1$. Toute combinaison linéaire des fonctions f_t est donc combinaison linéaire de f_0 et de f_1. La réciproque est évidente.

   Enfin les applications f_0 et f_1 sont indépendantes.

   On en déduit que $E_f = \text{vect}\{f_0, f_1\}$ et que $\dim E_f = 2$. [Q]

2. Pour tous réels t et x, $f_t(x) = f(t+x) = P(t+x)\exp(\alpha(t+x)) = \exp(\alpha t) P(t+x) \exp(\alpha x)$.

   Si P est de degré n, le polynôme $x \to P(x+t)$ est également de degré n et il est donc combinaison linéaire des fonctions $x \to x^k$, avex $0 \leq k \leq n$.

   On voit donc que f_t est combinaison linéaire des $n+1$ fonctions $g_k : x \to x^k \exp(\alpha x)$, avec $0 \leq k \leq n$. Il en est donc de même des combinaisons linéaires des fonctions f_t, c'est-à-dire des éléments de E_f.

   Ainsi les $n+1$ applications g_k constituent-elles une famille génératrice finie de E_f. On en déduit que E_f est de dimension finie. Plus précisément, $\dim E_f \leq 1 + \deg P$. [Q]

3. Soit n un entier naturel. On suppose par l'absurde que $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sont liées.

   Il existe donc $n+1$ réels non tous nuls $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$.

   Soit r la valeur du plus grand indice k tel que $\lambda_k \neq 0$.

   L'égalité précédente s'écrit maintenant : $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k f_k + \lambda_r f_r = 0$,

   c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \exp(e^k e^x) + \lambda_r \exp(e^r e^x) = 0$.

Multiplions cette égalité par $\exp(-\mathrm{e}^r\mathrm{e}^x)$.

On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \exp((\underbrace{\mathrm{e}^k - \mathrm{e}^r}_{<0})\mathrm{e}^x) + \lambda_r = 0$.

On fait tendre x vers $+\infty$. On obtient alors $\lambda_r = 0$, ce qui est absurde.

Conclusion : pour tout entier n, la famille $f_0, f_1, \ldots, f_n$ est libre.

On en déduit que E_f, qui contient des familles libres de cardinal quelconque, n'est pas un espace vectoriel de dimension finie. [Q]

4. (a) Puisque g_1 et g_2 sont libres, g_1 n'est pas la fonction nulle.
   Il existe donc un réel a_1 tel que $g_1(a_1)$ soit non nul.
   Considérons alors l'application :
   $x \to \delta_2(x) = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & g_1(x) \\ g_2(a_1) & g_2(x) \end{vmatrix} = g_1(a_1)g_2(x) - g_2(a_1)g_1(x)$.
   Autrement dit : $\delta_2 = g_1(a_1)g_2 - g_2(a_1)g_1$.
   Puisque $g_1(a_1) \neq 0$, δ_2 n'est pas l'application nulle, car sinon g_1, g_2 seraient liées.
   Il existe donc un réel a_2 tel que $\Delta_2 = \delta_2(a_2)$ soit non nul, ce qu'il fallait démontrer.
   NB : les réels a_1 et a_2 sont nécessairement distincts car $\delta_2(a_1) = 0$. [Q]

   (b) On procède par récurrence sur n.
   La propriété est vraie de façon évidente si $n = 1$, et la question précédente nous a montré qu'elle est vraie si $n = 2$.
   On suppose qu'il en est de même au rang n (avec $n \geq 1$ donné).
   Soient $g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}$ une famille de $n+1$ fonctions indépendantes.
   Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe n réels $a_1, \ldots, a_n$, distincts deux à deux, tels que $\Delta_n = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & \ldots & g_1(a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(a_1) & \ldots & g_n(a_n) \end{vmatrix}$ soit non nul.
   On forme alors l'application $x \to \delta_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & \ldots & g_1(a_n) & g_1(x) \\ g_2(a_1) & \ldots & g_2(a_n) & g_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(a_1) & \ldots & g_n(a_n) & g_n(x) \\ g_{n+1}(a_1) & \ldots & g_{n+1}(a_n) & g_{n+1}(x) \end{vmatrix}$.
   On développe ce déterminant par rapport à sa dernière colonne.
   On voit alors que l'application δ_{n+1} peut s'écrire $\delta_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k g_k$, avec $\lambda_n = \Delta_n$.
   On sait que le coefficient λ_n est non nul et que les applications $g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}$ sont libres. Il en découle que l'application δ_{n+1} ne peut pas être l'application nulle.
   Il existe donc un réel a_{n+1} tel que $\Delta_{n+1} = \delta_{n+1}(a_{n+1})$ soit non nul.
   Enfin a_{n+1} est différent de $a_1, \ldots, a_n$ car il est clair que δ_{n+1} s'annule en $a_1, \ldots, a_n$.
   On a ainsi prouvé la propriété au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence. [Q]

5. (a) Pour tout réel t, l'application f_t s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de $g_1, g_2, \ldots, g_n$: $\exists!(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $f_t = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_k g_k$.

Mais les coefficients h_k, définis de manière unique, sont en fait des fonctions de t.

L'égalité précédente s'écrit donc $\forall t\in\mathbb{R},\ f_t=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}h_k(t)g_k$,

c'est-à-dire $\forall t\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, f_t(x)=f(x+t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}h_k(t)g_k(x)$. [Q]

(b) On sait qu'il existe n réels $a_1,a_2,\ldots,a_n$, distincts deux à deux, tels que la matrice A carrée d'ordre n et de terme général $a_{ij}=g_i(a_j)$ soit inversible.

Dans l'égalité vue en (5a) on choisit successivement $x=a_1, x=a_2,\ldots,x=a_n$.

On obtient alors le système :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} g_1(a_1)h_1(t)+g_2(a_1)h_2(t)+\cdots+g_n(a_1)h_n(t)=f(a_1+t) & =f_{a_1}(t)\\ g_1(a_2)h_1(t)+g_2(a_2)h_2(t)+\cdots+g_n(a_2)h_n(t)=f(a_2+t) & =f_{a_2}(t)\\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \quad\vdots\\ g_1(a_n)h_1(t)+g_2(a_n)h_2(t)+\cdots+g_n(a_n)h_n(t)=f(a_n+t) & =f_{a_n}(t)\end{cases}$$

Considérons ces égalités comme un système de n équations linéaires relativement aux inconnues, $h_1(t),h_2(t),\ldots,h_n(t)$. La matrice de ce système est la matrice A précédemment évoquée, dont on sait qu'elle est inversible.

On peut résoudre ce système (dont le déterminant est le Δ_n de la question 4b) en utilisant les formules de Cramer. Pour prendre l'exemple de $h_1(t)$, on trouve :

$$\forall t\in\mathbb{R}, h_1(t)=\frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} f_{a_1}(t) & g_2(a_1) & \ldots & g_n(a_1)\\ f_{a_2}(t) & g_2(a_2) & \ldots & g_n(a_2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_{a_n}(t) & g_2(a_n) & \ldots & g_n(a_n)\end{vmatrix}$$

Si on développe le déterminant du numérateur par rapport à sa première colonne, on constate que h_1 peut s'écrire sous la forme : $h_1=\mu_1 f_{a_1}+\mu_2 f_{a_2}+\cdots+\mu_n f_{a_n}$.

L'application h_1 est donc combinaison linéaire des f_{a_k}, ce qui prouve qu'elle est dans E_f (en particulier elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.)

Par un raisonnement identique, on voit que $h_2,\ldots,h_n$ appartiennent elles aussi à E_f et sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ceci termine la démonstration de cette question. [Q]

(c) On connait l'égalité $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2, f(x+t)=h_1(t)g_1(x)+h_2(t)g_2(x)+\cdots+h_n(t)g_n(x)$.

Les applications $h_1,\ldots,h_n,g_1,\ldots,g_n$ sont dans E_f et sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On peut alors dériver p fois par rapport à la variable t.

Pour tout entier p, et tous réels x et t, on a donc :

$f^{(p)}(x+t)=h_1^{(p)}(t)g_1(x)+h_2^{(p)}(t)g_2(x)+\cdots+h_n^{(p)}(t)g_n(x)$.

Posons alors $t=0$. Il vient : $\forall p\in\mathbb{N}, f^{(p)}=h_1^{(p)}(0)g_1+h_2^{(p)}(0)g_2+\cdots+h_n^{(p)}(0)g_n$.

Ceci prouve que $f^{(p)}$ est combinaison linéaire de $g_1,\ldots,g_n$ et est donc un élément de E_f.

On en déduit que $f,f',f'',\ldots,f^{(n)}$ sont dans E_f.

Or E_f est de dimension n. Les $n+1$ applications $f,f',\ldots,f^{(n)}$ sont donc liées.

Autrement dit, il existe $n+1$ scalaires $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ non tous nuls tels qu'on ait l'égalité $\lambda_0 f+\lambda_1 f'+\cdots+\lambda_n f^{(n)}=0$.

Ce résultat signifie effectivement que f est solution d'une équation différentielle d'ordre n à coefficients constants. [Q]

6. Supposons que la dimension de E_f soit inférieure ou égale à 2.
La question précédente montre que l'application f est solution d'une équation différentielle $af'' + bf' + cf = 0$ à coefficients constants.
Notons $(C) : at^2 + bt + c = 0$ l'équation caractéristique, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $a = 0$ donc si l'équation différentielle vérifiée par f s'écrit en fait $bf' + cf = 0$, alors f est multiple d'une application $x \to \exp(\lambda x)$ (avec par exemple $\lambda = 0$ si $c = 0$.)
Supposons dans les trois cas suivants que a est non nul.
- Si $\Delta > 0$, et si λ, μ sont les deux racines réelles distinctes de (C), alors f est une combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)$ et de $x \to \exp(\mu x)$.
- Si $\Delta < 0$ et si $z = \lambda + i\mu$, avec $\mu \neq 0$, est une racine complexe non réelle de (C) alors f est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)\cos(\mu x)$ et de $x \to \exp(\lambda x)\sin(\mu x)$.
- Si $\Delta = 0$ et si λ est la racine double de l'équation (C), alors f est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)$ et de $x \to x\exp(\lambda x)$.

Dans tous les cas, f est donc de l'un des types suivants, où $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ sont des réels :

- $x \to u(x) = \alpha\exp(\lambda x) + \beta\exp(\mu x)$.
- $x \to v(x) = (\alpha x + \beta)\exp(\lambda x)$.
- $x \to w(x) = \exp(\lambda x)(\alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x))$.

Inversement, pour chacune de ces applications, le sous-espace E_f correspondant est de dimension inférieure ou égale à 2.
En effet, comme on l'a fait dans la question (1), on vérifie que pour tout réel t :

- u_t est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)$ et de $x \to \exp(\mu x)$.
- v_t est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)$ et de $x \to x\exp(\lambda x)$.
- w_t est combinaison linéaire de $x \to \exp(\lambda x)\cos(\mu x)$ et de $x \to \exp(\lambda x)\sin(\mu x)$.

Les formes u, v et w définissent donc toutes les applications f telles que $\dim E_f \leq 2$. [Q]