

Translatées d'une application

On note E l'espace vectoriel des applications de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

– Pour toute application f de E et pour tout réel t , on pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f_t(x) = f(x + t)$.

On dit que l'application f_t , qui appartient à E , est une *translatée* de f .

– On note E_f le sous-espace de E engendré par les f_t , c'est-à-dire l'ensemble des applications g de E qui peuvent s'écrire au moins d'une manière sous la forme $g = \lambda_1 f_{t_1} + \lambda_2 f_{t_2} + \dots + \lambda_p f_{t_p}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ et t_1, t_2, \dots, t_p sont des familles de p réels quelconques (p étant lui même un entier positif quelconque).

1. Dans chacun des cas suivants, vérifier que E_f est de dimension finie et en donner une base formée de fonctions du type f_t :

(a) L'application f est définie par : $f(x) = \exp(x)$ [S]

(b) L'application f est définie par : $f(x) = \sin x$ [S]

(c) L'application f est définie par : $f(x) = x$. [S]

2. Montrer que si f est de la forme $x \rightarrow f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, où P est un polynôme et α un réel, alors E_f est de dimension finie. [S]

3. On suppose que f est définie par $f(x) = \exp(\exp x)$.

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, les fonctions f_0, f_1, \dots, f_n forment une famille libre. Qu'en déduit-on pour le sous-espace E_f ? [S]

4. Dans cette question, on caractérise les familles libres finies de E à l'aide d'un déterminant.

(a) Soit g_1, g_2 une famille libre de E . Montrer qu'on peut trouver deux réels distincts a_1 et a_2 tels que le déterminant $\begin{vmatrix} g_1(a_1) & g_1(a_2) \\ g_2(a_1) & g_2(a_2) \end{vmatrix}$ soit non nul. [S]

(b) Montrer plus généralement que si g_1, g_2, \dots, g_n est une famille libre de E , on peut trouver n réels a_1, a_2, \dots, a_n distincts deux à deux, tels que le déterminant Δ_n , carré d'ordre n et de terme général $\delta_{ij} = g_i(a_j)$, soit non nul. [S]

5. Soit f un élément de E , tel que $\dim(E_f) = n \geq 1$. Soit g_1, \dots, g_n une base de E_f .

(a) Montrer qu'il existe une unique suite h_1, \dots, h_n d'applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, f(x + t) = h_1(t)g_1(x) + h_2(t)g_2(x) + \dots + h_n(t)g_n(x). \quad [\text{S}]$$

(b) Montrer qu'on peut trouver n réels a_1, \dots, a_n distincts deux à deux tels que pour tout j de $\{1, \dots, n\}$, h_j soit combinaison linéaire de f_{a_1}, \dots, f_{a_n} .

Indication : utiliser 4b et considérer un certain système de Cramer.

En conclure que h_1, h_2, \dots, h_n appartiennent à E_f . [S]

(c) Montrer que les dérivées successives de f sont dans E_f (utiliser 5a.)

En déduire que f satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants. [S]

6. Trouver tous les éléments f de E tels que $\dim E_f \leq 2$. [S]

Corrigé du problème

1. (a) Soit g un élément de E_f .

Il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et t_1, \dots, t_p tels que $g = \sum_{k=1}^p \lambda_k f_{t_k}$ c'est-à-dire tels que,

pour tout x de \mathbb{R} :

$$g(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \exp(t_k + x) = \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k \exp(t_k) \right) \exp(x) = \mu f(x), \text{ avec } \mu = \sum_{k=1}^p \lambda_k \exp(t_k).$$

Tout élément de E_f est donc un multiple de f .

La réciproque est évidente puisque $f = f_0$.

On en déduit que $\dim E_f = 1$ et que $E_f = \mathbb{R}f$. [Q]

- (b) Pour tous réels t et x , on a :

$$f_t(x) = \sin(t+x) = \cos(t)\sin(x) + \sin(t)\cos(x) = \cos(t)\sin(x) + \sin(t)\sin(x + \frac{\pi}{2}).$$

Autrement dit : $f_t = \cos(t)f_0 + \sin(t)f_{\pi/2}$.

Toute combinaison linéaire des fonctions f_t , c'est-à-dire tout élément de E_f , est donc combinaison linéaire de f_0 et de $f_{\pi/2}$. La réciproque est évidente.

Les fonctions f_0 et $f_{\pi/2}$ sont évidemment linéairement indépendantes.

On en déduit que $E_f = \text{vect}\{f_0, f_{\pi/2}\}$ et que $\dim E_f = 2$. [Q]

- (c) Pour tous réels t et x , on a : $f_t(x) = t+x = (1-t)x + t(x+1) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$.

Autrement dit : $f_t = (1-t)f_0 + tf_1$. Toute combinaison linéaire des fonctions f_t est donc combinaison linéaire de f_0 et de f_1 . La réciproque est évidente.

Enfin les applications f_0 et f_1 sont indépendantes.

On en déduit que $E_f = \text{vect}\{f_0, f_1\}$ et que $\dim E_f = 2$. [Q]

2. Pour tous réels t et x , $f_t(x) = f(t+x) = P(t+x) \exp(\alpha(t+x)) = \exp(\alpha t)P(t+x) \exp(\alpha x)$.

Si P est de degré n , le polynôme $x \rightarrow P(x+t)$ est également de degré n et il est donc combinaison linéaire des fonctions $x \rightarrow x^k$, avec $0 \leq k \leq n$.

On voit donc que f_t est combinaison linéaire des $n+1$ fonctions $g_k : x \rightarrow x^k \exp(\alpha x)$, avec $0 \leq k \leq n$. Il en est donc de même des combinaisons linéaires des fonctions f_t , c'est-à-dire des éléments de E_f .

Ainsi les $n+1$ applications g_k constituent-elles une famille génératrice finie de E_f . On en déduit que E_f est de dimension finie. Plus précisément, $\dim E_f \leq 1 + \deg P$. [Q]

3. Soit n un entier naturel. On suppose par l'absurde que f_0, f_1, \dots, f_n sont liées.

Il existe donc $n+1$ réels non tous nuls $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0$.

Soit r la valeur du plus grand indice k tel que $\lambda_k \neq 0$.

L'égalité précédente s'écrit maintenant : $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k f_k + \lambda_r f_r = 0$,

c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \exp(e^k e^x) + \lambda_r \exp(e^r e^x) = 0$.

Multiplions cette égalité par $\exp(-e^r e^x)$.

On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \exp(\underbrace{(e^k - e^r)}_{<0} e^x) + \lambda_r = 0$.

On fait tendre x vers $+\infty$. On obtient alors $\lambda_r = 0$, ce qui est absurde.

Conclusion : pour tout entier n , la famille f_0, f_1, \dots, f_n est libre.

On en déduit que E_f , qui contient des familles libres de cardinal quelconque, n'est pas un espace vectoriel de dimension finie. [Q]

4. (a) Puisque g_1 et g_2 sont libres, g_1 n'est pas la fonction nulle.

Il existe donc un réel a_1 tel que $g_1(a_1)$ soit non nul.

Considérons alors l'application :

$$x \rightarrow \delta_2(x) = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & g_1(x) \\ g_2(a_1) & g_2(x) \end{vmatrix} = g_1(a_1)g_2(x) - g_2(a_1)g_1(x).$$

Autrement dit : $\delta_2 = g_1(a_1)g_2 - g_2(a_1)g_1$.

Puisque $g_1(a_1) \neq 0$, δ_2 n'est pas l'application nulle, car sinon g_1, g_2 seraient liées.

Il existe donc un réel a_2 tel que $\Delta_2 = \delta_2(a_2)$ soit non nul, ce qu'il fallait démontrer.

NB : les réels a_1 et a_2 sont nécessairement distincts car $\delta_2(a_1) = 0$. [Q]

- (b) On procède par récurrence sur n .

La propriété est vraie de façon évidente si $n = 1$, et la question précédente nous a montré qu'elle est vraie si $n = 2$.

On suppose qu'il en est de même au rang n (avec $n \geq 1$ donné).

Soient g_1, g_2, \dots, g_{n+1} une famille de $n + 1$ fonctions indépendantes.

Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe n réels a_1, \dots, a_n , distincts deux à

deux, tels que $\Delta_n = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & \dots & g_1(a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(a_1) & \dots & g_n(a_n) \end{vmatrix}$ soit non nul.

On forme alors l'application $x \rightarrow \delta_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} g_1(a_1) & \dots & g_1(a_n) & g_1(x) \\ g_2(a_1) & \dots & g_2(a_n) & g_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(a_1) & \dots & g_n(a_n) & g_n(x) \\ g_{n+1}(a_1) & \dots & g_{n+1}(a_n) & g_{n+1}(x) \end{vmatrix}$.

On développe ce déterminant par rapport à sa dernière colonne.

On voit alors que l'application δ_{n+1} peut s'écrire $\delta_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k g_k$, avec $\lambda_n = \Delta_n$.

On sait que le coefficient λ_n est non nul et que les applications g_1, g_2, \dots, g_{n+1} sont libres. Il en découle que l'application δ_{n+1} ne peut pas être l'application nulle.

Il existe donc un réel a_{n+1} tel que $\Delta_{n+1} = \delta_{n+1}(a_{n+1})$ soit non nul.

Enfin a_{n+1} est différent de a_1, \dots, a_n car il est clair que δ_{n+1} s'annule en a_1, \dots, a_n .

On a ainsi prouvé la propriété au rang $n + 1$, ce qui achève la récurrence. [Q]

5. (a) Pour tout réel t , l'application f_t s'écrit de manière unique comme une combinaison

linéaire de $g_1, g_2, \dots, g_n : \exists!(h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $f_t = \sum_{k=1}^n h_k g_k$.

Mais les coefficients h_k , définis de manière unique, sont en fait des fonctions de t .

L'égalité précédente s'écrit donc $\forall t \in \mathbb{R}, f_t = \sum_{k=1}^n h_k(t)g_k$,

c'est-à-dire $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f_t(x) = f(x+t) = \sum_{k=1}^n h_k(t)g_k(x)$. [Q]

- (b) On sait qu'il existe n réels a_1, a_2, \dots, a_n , distincts deux à deux, tels que la matrice A carrée d'ordre n et de terme général $a_{ij} = g_i(a_j)$ soit inversible.

Dans l'égalité vue en (5a) on choisit successivement $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$.

On obtient alors le système :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} g_1(a_1)h_1(t) + g_2(a_1)h_2(t) + \dots + g_n(a_1)h_n(t) = f(a_1+t) = f_{a_1}(t) \\ g_1(a_2)h_1(t) + g_2(a_2)h_2(t) + \dots + g_n(a_2)h_n(t) = f(a_2+t) = f_{a_2}(t) \\ \vdots \\ g_1(a_n)h_1(t) + g_2(a_n)h_2(t) + \dots + g_n(a_n)h_n(t) = f(a_n+t) = f_{a_n}(t) \end{cases}$$

Considérons ces égalités comme un système de n équations linéaires relativement aux inconnues, $h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)$. La matrice de ce système est la matrice A précédemment évoquée, dont on sait qu'elle est inversible.

On peut résoudre ce système (dont le déterminant est le Δ_n de la question 4b) en utilisant les formules de Cramer. Pour prendre l'exemple de $h_1(t)$, on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h_1(t) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} f_{a_1}(t) & g_2(a_1) & \dots & g_n(a_1) \\ f_{a_2}(t) & g_2(a_2) & \dots & g_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{a_n}(t) & g_2(a_n) & \dots & g_n(a_n) \end{vmatrix}$$

Si on développe le déterminant du numérateur par rapport à sa première colonne, on constate que h_1 peut s'écrire sous la forme : $h_1 = \mu_1 f_{a_1} + \mu_2 f_{a_2} + \dots + \mu_n f_{a_n}$.

L'application h_1 est donc combinaison linéaire des f_{a_k} , ce qui prouve qu'elle est dans E_f (en particulier elle est de classe \mathcal{C}^∞ .)

Par un raisonnement identique, on voit que h_2, \dots, h_n appartiennent elles aussi à E_f et sont donc de classe \mathcal{C}^∞ . Ceci termine la démonstration de cette question. [Q]

- (c) On connaît l'égalité $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, f(x+t) = h_1(t)g_1(x) + h_2(t)g_2(x) + \dots + h_n(t)g_n(x)$.

Les applications $h_1, \dots, h_n, g_1, \dots, g_n$ sont dans E_f et sont donc de classe \mathcal{C}^∞ .

On peut alors dériver p fois par rapport à la variable t .

Pour tout entier p , et tous réels x et t , on a donc :

$$f^{(p)}(x+t) = h_1^{(p)}(t)g_1(x) + h_2^{(p)}(t)g_2(x) + \dots + h_n^{(p)}(t)g_n(x).$$

Posons alors $t = 0$. Il vient : $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)} = h_1^{(p)}(0)g_1 + h_2^{(p)}(0)g_2 + \dots + h_n^{(p)}(0)g_n$.

Ceci prouve que $f^{(p)}$ est combinaison linéaire de g_1, \dots, g_n et est donc un élément de E_f .

On en déduit que $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ sont dans E_f .

Or E_f est de dimension n . Les $n+1$ applications $f, f', \dots, f^{(n)}$ sont donc liées.

Autrement dit, il existe $n+1$ scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels qu'on ait l'égalité $\lambda_0 f + \lambda_1 f' + \dots + \lambda_n f^{(n)} = 0$.

Ce résultat signifie effectivement que f est solution d'une équation différentielle d'ordre n à coefficients constants. [Q]

6. Supposons que la dimension de E_f soit inférieure ou égale à 2.

La question précédente montre que l'application f est solution d'une équation différentielle $af'' + bf' + cf = 0$ à coefficients constants.

Notons (C) : $at^2 + bt + c = 0$ l'équation caractéristique, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

– Si $a = 0$ donc si l'équation différentielle vérifiée par f s'écrit en fait $bf' + cf = 0$, alors f est multiple d'une application $x \rightarrow \exp(\lambda x)$ (avec par exemple $\lambda = 0$ si $c = 0$.)

Supposons dans les trois cas suivants que a est non nul.

– Si $\Delta > 0$, et si λ, μ sont les deux racines réelles distinctes de (C) , alors f est une combinaison linéaire de $x \rightarrow \exp(\lambda x)$ et de $x \rightarrow \exp(\mu x)$.

– Si $\Delta < 0$ et si $z = \lambda + i\mu$, avec $\mu \neq 0$, est une racine complexe non réelle de (C) alors f est combinaison linéaire de $x \rightarrow \exp(\lambda x) \cos(\mu x)$ et de $x \rightarrow \exp(\lambda x) \sin(\mu x)$.

– Si $\Delta = 0$ et si λ est la racine double de l'équation (C) , alors f est combinaison linéaire de $x \rightarrow \exp(\lambda x)$ et de $x \rightarrow x \exp(\lambda x)$.

Dans tous les cas, f est donc de l'un des types suivants, où $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ sont des réels :

– $x \rightarrow u(x) = \alpha \exp(\lambda x) + \beta \exp(\mu x)$.

– $x \rightarrow v(x) = (\alpha x + \beta) \exp(\lambda x)$.

– $x \rightarrow w(x) = \exp(\lambda x)(\alpha \cos(\mu x) + \beta \sin(\mu x))$.

Inversement, pour chacune de ces applications, le sous-espace E_f correspondant est de dimension inférieure ou égale à 2.

En effet, comme on l'a fait dans la question (1), on vérifie que pour tout réel t :

– u_t est combinaison linéaire de $x \rightarrow \exp(\lambda x)$ et de $x \rightarrow \exp(\mu x)$.

– v_t est combinaison linéaire de $x \rightarrow \exp(\lambda x)$ et de $x \rightarrow x \exp(\lambda x)$.

– w_t est combinaison linéaire de $x \rightarrow \exp(\lambda x) \cos(\mu x)$ et de $x \rightarrow \exp(\lambda x) \sin(\mu x)$.

Les formes u, v et w définissent donc toutes les applications f telles que $\dim E_f \leq 2$. [Q]