

Étude d'une famille de matrices

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On note E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont trois réels quelconques. On pose $I = M(1, 0, 0)$, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

PARTIE I

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
En donner la dimension et une base. [S]
2. Calculer, en fonction de I, J, K les produits J^2, K^2, JK et KJ . [S]
3. Montrer que E est muni d'une structure d'anneau commutatif. [S]

PARTIE II

1. Exprimer $\det(M(a, b, c))$ comme un produit de trois facteurs linéaires par rapport à a, b, c . [S]
2. A quelles conditions $M(a, b, c)$ est-elle inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
Montrer alors, sans la calculer, que sa matrice inverse est dans E . [S]
3. Montrer que le sous-ensemble de E formé des matrices $M(a, b, c)$ de rang inférieur ou égal à 2 est la réunion de trois plans vectoriels $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et \mathcal{P}_3 dont on donnera une base (on notera \mathcal{P}_1 celui de ces plans qui est caractérisé par l'égalité $a = c$). [S]
4. Montrer que le sous-ensemble de E formé des matrices $M(a, b, c)$ de rang inférieur ou égal à 1 est la réunion de trois droites vectorielles $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 , que l'on précisera.
Montrer que ces droites sont les intersections deux à deux des plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et \mathcal{P}_3 . [S]
5. On considère toutes les matrices M de \mathcal{P}_1 qui sont effectivement de rang 2.
On leur associe un endomorphisme f_M de \mathbb{R}^3 (rapporté à sa base canonique).
Montrer que tous ces endomorphismes ont la même image et le même noyau. [S]

PARTIE III

Soient a et c deux réels. On pose $N = aI + cK$, $A = \frac{1}{2}(I + K)$ et $B = \frac{1}{2}(I - K)$

1. (a) Calculer AB, BA , et pour tout entier $n \geq 1$, A^n et B^n . [S]
(b) Montrer qu'il existe deux réels x et y tels que $N = xA + yB$. [S]
(c) En déduire, pour tout n de \mathbb{N} , l'expression de N^n . [S]
2. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice est N dans la base canonique.
(a) Montrer que $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 0, -1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 . [S]
(b) Déterminer la matrice N' de f dans cette base. [S]
(c) En déduire, pour tout n de \mathbb{N} , l'expression de N^n . [S]

Corrigé du problème

PARTIE I

1. Pour tous réels a, b, c , on a : $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$.

Ainsi E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par les matrices I, J, K .

On voit à l'évidence que $aI + bJ + cK = 0 \Rightarrow M(a, b, c) = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$.

La famille I, J, K est donc libre, et elle est une famille génératrice de E .

Elle est donc une base de E , et ainsi $\dim(E) = 3$. [Q]

2. On a $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve facilement $\begin{cases} J^2 = I + K, & K^2 = I \\ JK = KJ = J \end{cases}$ [Q]

3. On sait que $(E, +)$ est un groupe abélien. D'autre part la matrice identité est dans E .

Enfin, pour toutes matrices $M(a, b, c)$ et $M(a', b', c')$ de E , on a :

$$\begin{aligned} M(a, b, c)M(a', b', c') &= (aI + bJ + cK)(a'I + b'J + c'K) \\ &= (aa' + bb' + cc')I + (ab' + ba' + bc' + cb')J + (bb' + ac' + ca')K \\ &= M(aa' + bb' + cc', ab' + ba' + bc' + cb', bb' + ac' + ca') \\ &= M(a', b', c')M(a, b, c) \end{aligned}$$

Ainsi E est stable pour le produit de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On voit aussi que la restriction de ce produit à E est commutative.

Toutes ces propriétés font que E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. [Q]

PARTIE II

1. On trouve :

$$\begin{aligned} \det(M(a, b, c)) &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & b & c \\ 0 & a+c & b \\ c-a & b & a \end{vmatrix} = (a-c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a+c & b \\ -1 & b & a \end{vmatrix} \\ &= (a-c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a+c & b \\ 0 & 2b & a+c \end{vmatrix} = (a-c) ((a+c)^2 - 2b^2) \\ &= (a-c)(a + b\sqrt{2} + c)(a - b\sqrt{2} + c) \end{aligned} \quad [Q]$$

2. $M(a, b, c)$ est inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(M(a, b, c)) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq c \\ |a+c| \neq \sqrt{2}|b| \end{cases}$

Supposons donc que $M(a, b, c)$ soit inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Il reste à vérifier qu'il existe $M(a', b', c')$ telle que $M(a, b, c)M(a', b', c') = I$.

D'après (I.2), cela équivaut à $\begin{cases} aa' + bb' + cc' = 1 \\ ba' + (a+c)b' + bc' = 0 \\ ca' + bb' + ac' = 0 \end{cases}$

C'est un système linéaire aux inconnues a', b', c' , et qui possède une solution unique car son déterminant est $\det(M(a, b, c)) \neq 0$. Ainsi M^{-1} est dans E . [Q]

3. Soit $M = M(a, b, c)$ dans E . On a $\text{rg}(M) \leq 2 \Leftrightarrow \det(M(a, b, c)) = 0$.

Cela signifie qu'on est dans l'un des trois cas suivants :

– Premier cas : $a = c$.

Cette condition s'écrit $M = a(I + K) + bJ$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On obtient le plan \mathcal{P}_1 dont une base est formée de $M_1 = I + K$ et $N_1 = J$.

– Deuxième cas : $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + c)$.

Cette condition s'écrit $M = a\left(I + \frac{\sqrt{2}}{2}J\right) + c\left(K + \frac{\sqrt{2}}{2}J\right)$, avec $(a, c) \in \mathbb{R}^2$.

On obtient le plan \mathcal{P}_2 dont une base est $M_2 = I + \frac{\sqrt{2}}{2}J$, $N_2 = K + \frac{\sqrt{2}}{2}J$.

– Troisième cas : $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}(a + c)$.

Cette condition s'écrit $M = a\left(I - \frac{\sqrt{2}}{2}J\right) + c\left(K - \frac{\sqrt{2}}{2}J\right)$, avec $(a, c) \in \mathbb{R}^2$.

On obtient le plan \mathcal{P}_3 dont une base est $M_3 = I - \frac{\sqrt{2}}{2}J$, $N_3 = K - \frac{\sqrt{2}}{2}J$.

Les matrices non inversibles de E forment donc la réunion des plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$. [Q]

4. Soit $M = M(a, b, c)$ dans E .

On a $\text{rg}(M) \leq 1 \Leftrightarrow$ tous les déterminants d'ordre 2 extraits de M sont nuls.

Cela équivaut à $\begin{cases} b^2 = a(a + c) \\ b(a - c) = 0 \\ b^2 = c(a + c) \\ a^2 = c^2 \end{cases}$, c'est-à-dire à : $\begin{cases} c = a \\ b^2 = 2a^2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} c = -a \\ b = 0 \end{cases}$

On obtient donc trois possibilités : $\begin{cases} c = a \\ b = a\sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} c = a \\ b = -a\sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} c = -a \\ b = 0 \end{cases}$

– Premier cas : $c = -a$ et $b = 0$.

On trouve les matrices $M = a(I - K)$, avec a dans \mathbb{R} . C'est une droite \mathcal{D}_1 .

– Deuxième cas : $c = a$ et $b = -a\sqrt{2}$.

On trouve les matrices $M = a(I - \sqrt{2}J + K)$, avec a dans \mathbb{R} . C'est une droite \mathcal{D}_2 .

– Troisième cas : $c = a$ et $b = a\sqrt{2}$.

On trouve les matrices $M = a(I + \sqrt{2}J + K)$, avec a dans \mathbb{R} . C'est une droite \mathcal{D}_3 .

On a $M(a, b, c) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = a\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow M(a, b, c) \in \mathcal{D}_3$

La droite \mathcal{D}_3 est donc l'intersection des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .

On constate de même que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ et que $\mathcal{D}_2 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3$. [Q]

5. Par hypothèse, on peut écrire $M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$, et $\dim \ker f_M = 1$ et $\dim \text{Im } f_M = 2$.

$\begin{cases} u = (1, 0, 1) \\ v = (0, 1, 0) \end{cases}$ engendrent le plan $\text{Im } f_M$, également engendré par $\begin{cases} (a, b, a) = au + bv \\ (b, 2a, b) = bu + 2av \end{cases}$

D'autre part, le vecteur $(1, 0, -1)$ est visiblement dans $\ker f_M$.

On voit donc que $\text{Im } f_M$ et $\ker f_M$ sont indépendants de M , si $M \in \mathcal{P}_1$ et $\text{rg}(M) = 2$. [Q]

PARTIE III

1. (a) On sait que $K^2 = I$. On en déduit $AB = BA = \frac{1}{4}(I^2 - K^2) = 0$.
 On a $A^2 = \frac{1}{4}(I^2 + 2K + K^2) = \frac{1}{2}(I + K)$, donc $A^n = A$ pour tout n de \mathbb{N}^* .
 De même $B^2 = \frac{1}{4}(I^2 - 2K + K^2) = \frac{1}{2}(I - K)$, donc $B^n = B$ pour tout n de \mathbb{N}^* . [Q]
- (b) On a $N = aI + cK = a(A+B) + c(A-B) = (a+c)A + (a-c)B$. Donc $\begin{cases} x = a+c \\ y = a-c \end{cases}$ [Q]
- (c) A et B commutent donc on peut utiliser la formule du binôme pour calculer N^n .
 Mais $AB = BA = 0$ donc $A^k B^{n-k} = 0$ pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$.
 Pour tout $n \geq 1$, il en résulte $N^n = (xA + yB)^n = x^n A^n + y^n B^n = x^n A + y^n B$.
 Ainsi $N^n = (a+c)^n A + (a-c)^n B$ pour tout n de \mathbb{N} (c'est vrai si $n=0$). [Q]

2. (a) On a $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = (\alpha + \gamma, \beta, \alpha - \gamma)$.
 Il est alors évident que $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.
 Les trois vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont libres dans \mathbb{R}^3 , donc ils en forment une base. [Q]
- (b) On a $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a+c & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a+c & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (a+c) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 Ainsi $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = (a+c)\varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_2) = (a+c)\varepsilon_2 \end{cases}$. De même $f(\varepsilon_3) = (a-c)\varepsilon_3$.
 La matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est donc $N' = \begin{pmatrix} a+c & 0 & 0 \\ 0 & a+c & 0 \\ 0 & 0 & a-c \end{pmatrix}$. [Q]
- (c) Pour tout n de \mathbb{N} , on $\begin{cases} f^n(\varepsilon_1) = (a+c)^n \varepsilon_1 \\ f^n(\varepsilon_2) = (a+c)^n \varepsilon_2 \\ f^n(\varepsilon_3) = (a-c)^n \varepsilon_3 \end{cases}$ (simple conséquence de ce qui précède.)

Les vecteurs de la base canonique vérifient $e_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$, $e_2 = \varepsilon_2$, $e_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$.

On en déduit successivement :

$$\begin{aligned} f^n(e_1) &= \frac{1}{2}(f^n(\varepsilon_1) + f^n(\varepsilon_3)) = \frac{1}{2}((a+c)^n \varepsilon_1 + (a-c)^n \varepsilon_3) \\ &= \frac{1}{2}((a+c)^n(e_1 + e_3) + (a-c)^n(e_1 - e_3)) \\ &= \frac{1}{2}((a+c)^n + (a-c)^n)e_1 + \frac{1}{2}((a+c)^n - (a-c)^n)e_3 \end{aligned}$$

De même $f^n(e_3) = \frac{1}{2}((a+c)^n - (a-c)^n)e_1 + \frac{1}{2}((a+c)^n + (a-c)^n)e_3$.

Enfin $f^n(e_2) = (a+c)^n e_2$. La matrice de f^n dans la base canonique est donc

$$N^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+c)^n + (a-c)^n & 0 & (a+c)^n - (a-c)^n \\ 0 & (a+c)^n & 0 \\ (a+c)^n - (a-c)^n & 0 & (a+c)^n + (a-c)^n \end{pmatrix}$$

[Q]