Séries numériques ou vectorielles

Sommaire

I Généralités sur les séries

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(E\,,\,\|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé. À toute suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E on associe la suite $U=(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$. Le couple $(u\,,\,U)$ s'appelle *série associée* à la suite u et lorsque l'on convient de noter u_n le terme général de la suite u, la série $(u\,,\,U)$ est dite *série de terme général* u_n et se note alors $\sum u_n$. On a ainsi

$$\sum u_n=(u\,,\,U) \tag{1.1}$$
$$\forall\, n\in\mathbb{N}\,,\; U_{n+1}-U_n=u_{n+1} \tag{1.2}$$

On dit enfin que la suite U est la *suite des sommes partielles* de la série de terme général u_n définie par la relation (1.1).

I.1 Espace vectoriel des séries, Sous-espace des Séries convergentes

Soit $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des séries à valeurs dans E :

$$\mathcal{S}(E)=\Big\{(u\,,\,U)=\sum u_n \;\mid\; u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}\Big\}$$

On dit que la série $\sum u_n\in\mathcal{S}(E)$ est *convergente* lorsque la suite U de ses sommes partielles est convergente dans $(E\,,\,\|\cdot\|)$. Lorsqu'il en est ainsi la limite de la suite U est notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ et s'appelle *somme de la série* $\sum u_n$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des séries à valeurs dans E est un sous-espace vectoriel de $(E^{\mathbb{N}})^2$ et le sous-ensemble $\mathcal{S}'(E)$ des séries convergentes à valeurs dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(E)$. L'application $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ de $\mathcal{S}'(E)$ vers E qui à une série convergente associe sa somme est une application linéaire.

Proposition Relation Suite-Série

L'application qui, à la série à valeurs dans E de terme général u_n, associe la suite U de ses sommes partielles est un isomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ sur l'espace vectoriel $E^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans E. L'isomorphisme réciproque est l'application qui à une suite $U=(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E associe la série de terme général u_n défini par $u_n=U_n-U_{n-1}$ si $n\in\mathbb{N}^*$ et $u_0=U_0$.

- ☞ Si une série $\sum u_n$ converge, la suite u converge vers 0.
- ☞ Si une suite u est divergente ou convergente vers une limite non nulle la série $\sum u_n$ associée à u est divergente : on dit dans ce cas que la série est *grossièrement* divergente.

☞ Toute suite $U \in E^{\mathbb{N}}$ est de même nature (du point de vue de la convergence) que la série *dérivée* de U de terme général $U_{n+1} - U_n$. En cas de convergence, la relation (1.2) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} (U_{n+1} - U_n) = \big(\lim_{n\to\infty} U_n\big) - U_0 \,.$$

I.2 Critère de Cauchy. Espace des séries normalement convergentes

Toute série convergente $\sum u_n$ à valeurs dans $(E\,,\,\|\cdot\|)$ vérifie l'assertion de Cauchy (traduisant que la suite U de ses sommes partielles est de Cauchy) :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \,,\ \exists N \in \mathbb{N} \,,\ \forall n \geqslant N \,,\ \forall p \in \mathbb{N}^* \,,\ \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \leqslant \varepsilon \qquad \text{(CY)}$$

Théorème Critère de Cauchy

Soit $(E\,,\,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Pour que la série $\sum u_n$ à valeurs dans E soit convergente il faut et il suffit que l'assertion (CY) soit vérifiée.

Corollaire Convergence normale

Soit $(E\,,\,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite telle que la série $\sum ||u_n||$ (à valeurs dans $\mathbb{R}_+$) soit convergente. Alors la série $\sum u_n$ est convergente. En outre $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||$.

☞ Une série telle que $\sum ||u_n||$ converge est dite *normalement* convergente. L'ensemble des séries normalement convergentes à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}'(E)$.

☞ Dans le cas $E = \mathbb{K}$ on parle de séries numériques et comme la norme est ici la valeur absolue, on parle de convergence absolue pour une série numérique $\sum u_n$ telle que la série $\sum |u_n|$ converge. Ainsi *toute série numérique absolument convergente est convergente.*

Corollaire

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $q \in \mathbb{N}^*$ et e une base quelconque de E. Pour que la série $\sum u_n$ à valeurs dans E soit convergente (respectivement normalement convergente) il faut et il suffit que les q séries numériques associées aux suites composantes de u_n relativement à la base e soient convergentes (respectivement absolument convergentes).

Ces corollaires montrent l'importance de l'étude de la convergence des séries à termes réels positifs pour l'étude de la convergence (normale ou absolue) des séries vectorielles ou numériques.

II Séries à termes réels positifs

Lorsqu'une série $\sum u_n = (u\,,\,U)$ est associée à une suite u à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, *la suite U de ses sommes partielles est croissante* en raison de la relation suite-série :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; U_{n+1} - U_n = u_{n+1} \geqslant 0\,.$$

Il en résulte le théorème simple mais fondamental :

Théorème

Pour que la série $\sum u_n$ à termes réels positifs soit convergente il faut et il suffit que la suite $U = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles soit majorée.

II.1 Les règles de comparaison : $\mathcal{O}$, o $\sim$

Corollaire Règle de domination

Soient u et v deux suites réelles telles qu'il existe un rang N et un réel positif M vérifiant

$$\forall n \geqslant N\,,\; 0 \leqslant u_n \leqslant M v_n$$

Si la série $\sum u_n$ est divergente, il en est de même pour la série $\sum v_n$.
Si la série $\sum v_n$ est convergente, il en est de même pour la série $\sum u_n$.

- ☞ On dit qu'une suite u à termes réels positifs est dominée par une suite à termes réels positifs v lorsqu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant M v_n$. Cette relation entre suites réelles positives se note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$: La relation de domination $\mathcal{O}$ n'est pas un ordre sur l'ensemble des suites réelles positives mais c'est une relations réflexive et transitive.
- ☞ Si deux suites réelles positives u et v vérifient $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(u_n)$ alors les séries associées $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (du point de vue de la convergence) c'est à dire qu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.
- ☞ On dit que la suite réelle u est négligeable devant la suite réelle v lorsqu'il existe une suite réelle ε convergente vers 0 telle que $u = \varepsilon v$. Cette relation entre suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se note $u_n = o(v_n)$.

  On dit que la suite réelle u est équivalente à la suite réelle v lorsque $u_n - v_n = o(v_n)$ ce que l'on écrit indifféremment $u_n = v_n + o(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$. On vérifie que la relation ainsi définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est réflexive, symétrique et transitive, c'est pourquoi on l'appelle *relation d'équivalence*. Un développement limité de u_n lorsqu'il est possible donnera ainsi un équivalent simple de u_n , pour lequel la règle d'équivalence ci-dessous permet de conclure quant-à la nature de $\sum u_n$.

Corollaire Règle d'équivalence

Soient u et v deux suites réelles positives telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries associées $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (du point de vue de la convergence).

En effet lorsque $u_n \sim v_n$ on a aussi $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(u_n)$.
Voici quelques exemples simples mais utiles (séries de Riemann) :

- ☞ La suite réelle de terme général $U_n = \ln n$ est divergente donc la série de terme général $U_{n+1} - U_n$ est divergente. Or
$$U_{n+1} - U_n = \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \sim \frac{1}{n} \tag{1.3}$$
Donc la série *harmonique* $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- ☞ Pour tout réel $\alpha \leqslant 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$ Donc par la règle de domination $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge lorsque $\alpha \leqslant 1$.
- ☞ Pour tout réel $\alpha > 1$ la suite de terme général $U_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge (vers 0) donc la série de terme général $U_{n+1} - U_n$ est convergente. Un développement limité quand n tend vers l'infini donne
$$U_{n+1} = U_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = U_n + \frac{1-\alpha}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
soit encore
$$U_{n+1} - U_n \sim \frac{1-\alpha}{n^\alpha} \tag{1.4}$$
La règle d'équivalence pour les série à termes positifs montre ainsi que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente lorsque $\alpha > 1$.
- ☞ Règle de Riemann : *Soit u une suite réelle telle qu'il existe un réel non nul M et un réel α vérifiant $u_n \sim \frac{M}{n^\alpha}$. La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*
- ☞ Sommation des relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence : *Soient u et v deux suites réelles positives telles que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. Alors $U_n = \mathcal{O}(V_n)$, c'est à dire $\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathcal{O}\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big)$. Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum u_n$ diverge, alors $U_n = o(V_n)$. Enfin si $u_n \sim v_n$ et si $\sum u_n$ diverge, alors $U_n \sim V_n$.*
Soient u et v deux suites réelles positives telles que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et la série $\sum v_n$ soit convergente. Alors $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \mathcal{O}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\Big)$. Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = o\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\Big)$. Enfin si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$.

Par exemple la sommation des relations d'équivalence (1.3) donne
$$\ln n \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{1.5}$$

La sommation des relations d'équivalence (1.4) pour $\alpha < 1$ donne

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \tag{1.6}$$

De même la sommation des relations d'équivalence (1.4) pour $\alpha > 1$ donne

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \tag{1.7}$$

II.2 Comparaison à une série géométrique

Une série numérique géométrique a pour terme général $u_n = u_0 r^n$ où le réel non nul r est la raison de u. Pour $r \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \cdot$ Une série géométrique non nulle est convergente si et seulement si sa raison r vérifie $|r| < 1$. Lorsque cette condition est vérifiée $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \frac{u_0}{1-r} \cdot$ Une série géométrique non nulle $\sum u_n$ est caractérisée par la relation $\frac{u_{n+1}}{u_n} = r$.

Proposition

> Si u et v sont deux suites réelles à termes strictement positifs et si, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

En particulier lorsque v est une suite géométrique, on a la

Proposition Règle de d'Alembert

> Si u est une suite réelle à termes strictement positifs et s'il existe un réel $r < 1$ tel qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r$, alors $\sum u_n$ est convergente et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_n = \mathcal{O}(r^n)$.

- ☞ La règle de d'Alembert s'applique notamment lorsque la suite u à termes strictement positifs est telle que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers un réel $\ell < 1$.
- ☞ lorsque $z \in \mathbb{C}^*$ la règle de d'Alembert s'applique pour $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ (ici $\ell = 0$) si bien que pour tout $z \in \mathbb{C}$ la série numérique $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente donc convergente. On appelle sa somme *exponentielle de* z.
- ☞ Lorsque la suite u à termes strictement positifs est telle qu'à partir d'un certain rang N, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, la suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est croissante donc la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

II.3 Série et intégrale de fonction positive et décroissante

Théorème

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0\,,\,+\infty[$ à valeurs dans $[0\,,\,+\infty[$ et décroissante. La série de terme général $v_n = f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f$ est convergente. En particulier la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente si et seulement si f est intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$.

En effet cela résulte directement de l'encadrement $0 \leqslant v_n \leqslant u_n - u_{n+1}$ et du théorème de majoration des sommes partielles puisqu'alors $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant u_0$.

☞ Par exemple pour $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$ le théorème ci-dessus permet de préciser l'équivalence (1.5) par la convergence de la suite de terme général $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n+2)$. La limite de cette suite s'appelle *constante d'Euler* et se note γ. On a ainsi un développement limité à l'ordre 0 de la somme de la série harmonique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \tag{1.8}$$

☞ Pour $f(t) = \dfrac{1}{(t+2)\ln^{\alpha}(t+2)}$, f est intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$ si et seulement si le réel α est strictement supérieur à 1. Le théorème ci- dessus montre que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln^{\alpha} n}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

III Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Le Critère de Cauchy et de la règle de domination pour les séries à termes réels positifs conduisent au

Théorème de domination

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, pour laquelle il existe une suite à valeurs réelles positives v telle que $\|u_n\| = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Alors la série $\sum u_n$ est (normalement) convergente et sa somme vérifie $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{A}$ est dite normée lorsqu'elle est munie d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant

$$\forall (a\,,\,b) \in \mathcal{A}^2,\ \|ab\| \leqslant \|a\|\,\|b\|\,.$$

Par exemple $\big(\mathbb{K}\,,\,|\cdot|\big)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre normée. Lorsque $\big(E\,,\,\|\cdot\|\big)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, la norme définie sur $\mathcal{L}(E)$ par

$$\forall u \in \mathcal{L}(E)\,,\ |||u||| = \sup\,\{\|u(x)\|\ ;\ x \in E\,,\, \|x\| = 1\}$$

fait de $\mathcal{L}(E)$ une $\mathbb{K}$-algèbre normée.
Le théorème de domination a les corollaires suivants :

Corollaire série géométrique

Soit $\big(\mathcal{A}\,,\,\|\cdot\|\big)$ une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie. Pour tout $u \in \mathcal{A}$ vérifiant $\|u\| < 1$, la série $\sum u^n$ est (normalement) convergente et sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ est inversible, d'inverse $1_{\mathcal{A}} - u$.

Corollaire série exponentielle

Soit $\big(\mathcal{A}\,,\,\|\cdot\|\big)$ une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie. Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ est (normalement) convergente. Sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ s'appelle exponentielle de u et se note $\exp u$.

Sous les conditions du Corollaire on a aussi $\|\exp u\| \leqslant \exp(\|u\|)$.

III.1 Cas des séries à valeurs réelles et alternées

Une suite réelle u est dite alternée lorsque la suite de terme général $(-1)^n u_n$ est de signe constant. Lorsque la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante les suites de terme général $U_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k$ et $U_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k$ sont monotones de sens contraire. Il en résulte le

Théorème des séries alternées

Soit u une suite réelle alternée telle que la suite de terme général $|u_n|$ soit décroissante de limite nulle. Alors la série $\sum u_n$ est convergente, sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ a le signe de u_0 et $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leqslant |u_0|$.

☞ Par exemple les séries riemanniennes alternées $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$ convergent si et seulement si le réel α est strictement positif et alors leur reste de Cauchy est tel que

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

☞ Une série numérique peut être convergente sans être absolument convergente (cas précédent pour $\alpha \in]0\,,\,1]$).

☞ deux suites réelles peuvent être équivalentes sans que les séries associées soient de même nature. C'est le cas pour $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n+1}$. Ici $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ converge alors que $\sum v_n$ diverge.

III.2 Comparaison d'une série à une intégrale

Lorsque le théorème de domination n'est pas applicable, et que l'on a affaire à une série de terme général $u_n = f(n)$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ réelle ou à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut penser au théorème suivant :

Théorème de comparaison série-intégrale

Étant donnée une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,,\,+\infty[$ à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E telle que sa dérivée f' soit intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$, la série de terme général $v_n = f(n) - \int_n^{n+1} f$ est (normalement) convergente. La suite de terme général $I_n = \int_0^n f$ est de même nature (du point de vue de la convergence) que la série de terme général $u_n = f(n)$.

☞ Cela résulte de l'égalité $v_n = -\int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ (intégration par parties) qui donne la domination $||v_n|| \leqslant \int_n^{n+1} ||f'(t)||\,\mathrm{d}t = w_n$. La convergence (normale) de $\sum v_n$ résulte de celle de $\sum w_n$, elle même due à l'intégrabilité de f' (donc de $||f'||$) sur $[0\,,\,+\infty[$.

☞ Par exemple la fonction f définie par $f(t) = \frac{\sin \ln(t+1)}{t+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,,\,+\infty[$ et $|f'(t)| \leqslant \frac{2}{(t+1)^2}$ qui est intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$. Le théorème de comparaison à une intégrale s'applique donc pour la série $\sum f(n-1) \quad (n \geqslant 1)$: Elle est de même nature que la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\sin \ln t}{t}\, dt$ qui diverge puisque $I_n = 1 - \cos \ln n$.

Ainsi la série $\sum \dfrac{\sin \ln n}{n}$ est divergente. Cependant les inégalités dans la preuve ci-dessus du théorème donnent

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \ln k}{k} \right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f'| + I_{n+1} \leqslant 4\,.$$

☞ En application du théorème de comparaison série-intégrale, le lecteur pourra montrer les points suivants :

- pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$ la série $\sum \dfrac{1}{n^{1+i\theta}}$ est divergente
- pour tout réel non nul θ les sommes partielles de la série sont bornées, en module majorées par $\sqrt{1+\theta^2} + \dfrac{2}{\theta}$.

☞ Considérons la série de terme général $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n} \quad (\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z})$. Cette série n'est pas absolument convergente et si l'on cherche à appliquer le théorème de comparaison série-intégrale, on doit envisager l'intégrabilité de f' sur $[1\,, +\infty[$ où $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{ix\theta}}{x}$. Malheureusement f' n'est pas intégrable, en revanche la "partie" $\dfrac{1}{x}$ est à dérivée intégrable. Une intégration de f par parties conduirait ici à primitiver $\mathrm{e}^{ix\theta}$. On "somme" donc $\mathrm{e}^{in\theta}$: $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \mathrm{e}^{in\theta}$, pour que sa "dérivée" $S_k - S_{k-1}$ soit bien $\mathrm{e}^{ik\theta}$. On a ainsi, en posant $S_0 = 0$,

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{v_k} + \frac{S_n}{n+1}$$

Ici $|v_k| \leqslant \dfrac{2}{|1-\mathrm{e}^{i\theta}|}\dfrac{1}{k^2}$ donc la série de terme général v_k est absolument convergente et $\left| \dfrac{S_n}{n+1} \right| \leqslant \dfrac{2}{|1-\mathrm{e}^{i\theta}|}\dfrac{1}{n+1}$ converge vers 0. Donc la série $\sum u_n$ est convergente (mais non absolument convergente).

La transformation ainsi faite sur les sommes partielles de la série $\sum u_n$ s'appelle Transformation d'Abel (c'est l'analogue d'une intégration par parties). Cette transformation donnera des résultats lorsque :

$$u_n = a_n b_n \ , \ b_n = B_n - B_{n-1} \ , \ \text{ou } b_n = B_n - B_{n+1} \ ,$$

où B_n est le terme général d'une suite bornée et la série $\sum (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente : B_n est la somme partielle de la série $\sum b_n$ ou son reste de Cauchy si elle converge.

IV Familles sommables

IV.1 Définition et caractérisation des familles sommables

Une famille $u=(u_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble I est une application de source I. On s'intéresse ici au cas où I est strictement dénombrable c'est à dire qu'il existe une bijection σ de $\mathbb{N}$ sur I. On suppose également que la famille u est à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. Dans ces conditions, on dit que la famille u est sommable si l'on peut choisir la bijection σ de sorte que la fonction u_σ en escalier sur $[0\,,\,+\infty[$, coïncidant sur chaque intervalle $[n\,,\,n+1[$ $(n\in\mathbb{N})$ avec la constante $u_{\sigma(n)}$, soit intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$. On montre enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} u_\sigma$ est indépendante du choix de la bijection σ. Sa valeur s'appelle somme de la famille (sommable) u et se note $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$. On a ainsi $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \int_{\mathbb{R}_+} u_\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$.

Théorème Caractérisation des familles sommables

Soit $u=(u_i)_{i\in I}$ une famille indexée par un ensemble dénombrable à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La famille u est sommable

(ii) Il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longmapsto E$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit normalement convergente

(iii) Pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longmapsto E$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est normalement convergente

(iv) L'ensemble des sommes $\displaystyle\sum_{i\in J} ||u_i||$, où J décrit l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, est une partie majorée de $\mathbb{R}_+$

(v) Il existe une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de parties finies de I recouvrant I $(i.e \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I)$ telle que les sommes $\displaystyle\sum_{i\in J_n} ||u_i||$ soient majorées

(vi) Pour toute suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de parties finies de I recouvrant I les sommes $\displaystyle\sum_{i\in J_n} ||u_i||$ sont majorées

Lorsque l'une de ces conditions est vérifiée la somme de u est donnée par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in J_n} u_i \tag{1.9}$$

☞ L'assertion *(iv)* montre que toute sous-famille d'une famille sommable est sommable. La formule (1.9) est encore valable pour tout recouvrement croissant de I par une suite croissante de parties (pas spécialement finies) de I.

☞ L'assertion *(ii)* montre qu'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie est sommable si et seulement si la série associée est normalement convergente.

☞ Prenons la suite anharmonique : $I = \mathbb{N}^*$ et $u = \left(\dfrac{(-1)^i}{i}\right)_{i\in I}$. Le choix dans (v) du recouvrement croissant de I par les segments $J_n = [\![1\,,\, 2n]\!]$ donne

$$\sum_{i\in J_n} u_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) \text{ soit encore}$$

$$\sum_{i\in J_n} u_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = (\ln n + \gamma) - \big(\ln(2n) + \gamma\big) + o(1) = -\ln 2 + o(1)$$

d'après la formule (1.8) du §II.3. On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} u_i = -\ln 2 = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i$. Mais on peut aussi former un recouvrement croissant $(J'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de I par des parties finies telles que les sommes partielles $\displaystyle\sum_{i\in J'_n} u_i$ de la famille u le long de ce recouvrement divergent en convergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$:

L'exemple $J'_n = \{2k \mid k \in [\![1\,,\, n^2]\!]\} \bigcup \{2k-1 \mid k \in [\![1\,,\, n]\!]\}$ donne en effet (par l'usage comme ci-dessus de la formule (9) du §2.3) $\displaystyle\sum_{i\in J'_n} u_i \sim \frac{1}{2}\ln n$.

L'exemple $J''_n = \{2k \mid k \in [\![1\,,\, n]\!]\} \bigcup \{2k-1 \mid k \in [\![1\,,\, n^2]\!]\}$ donne un recouvrement croissant de I par des parties finies telles que $\displaystyle\sum_{i\in J''_n} u_i \sim -\frac{1}{2}\ln n$.

☞ Si $u = (u_i)_{i\in I}$ et $v = (v_j)_{j\in J}$ sont deux familles sommables à valeurs dans une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie, alors la famille produit $w = (u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \sum_{i\in I} u_i \sum_{j\in J} v_j$.

☞ Étude de la sommabilité de la famille de réels positifs u indexée par $\mathbb{N}^{*p}$ définie par $u_{(n_1,\cdots,n_p)} = \dfrac{1}{(n_1+\cdots+n_p)^\alpha}$ (p fixé dans $\mathbb{N}^*$ et α dans $\mathbb{R}_+^*$) :

La moyenne géométrique de p réels positifs étant inférieure à leur moyenne arithmétique, on a $u_{(n_1,\cdots,n_p)} \leqslant \dfrac{1}{n_1^{\frac{\alpha}{p}}\cdots n_p^{\frac{\alpha}{p}}} = v_{(n_1,\cdots,n_p)}$. La famille v est la famille produit de la suite riemannienne $\left(\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{p}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ p fois par elle même. Elle est donc sommable lorsque $\alpha > p$.

Par domination, la famille u est sommable lorsque $\alpha > p$ et sa somme vérifie

$$\sum_{(n_1,\cdots,n_p)\in\mathbb{N}^{*p}} \frac{1}{(n_1+\cdots+n_p)^\alpha} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{p}}}\right)^p.$$

Lorsque $\alpha \leqslant p$, on a $u_{(n_1,\cdots,n_p)} \geqslant \dfrac{1}{(n_1+\cdots+n_p)^p} = w_{(n_1,\cdots,n_p)}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $J_n = \{(n_1,\cdots,n_p)\in\mathbb{N}^{*p} \mid n_1+\cdots+n_p \leqslant n\}$. $(J_n)_{n\geqslant p}$ est un recouvrement croissant de $\mathbb{N}^{*p}$ par une suite de parties finies vérifiant $\mathrm{Card}(J_n) = \mathrm{C}_n^p$. D'où

$\displaystyle\sum_{(n_1,\cdots,n_p)\in J_n\setminus J_{n-1}} w_{(n_1,\cdots,n_p)} = \frac{C_{n-1}^{p-1}}{n^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(p-1)!\,n}$ · La série harmonique étant divergente l'assertion *(vi)* du théorème de caractérisation des familles sommables est niée : ceci montre que la famille w n'est pas sommable, et ainsi la famille u (majorant $w>0$) n'est pas sommable. Finalement la famille u est sommable si et seulement si $\alpha > p$.

☞ (Développement de Fourier d'une fonction 1-périodique) La famille $c(f) = \big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier d'une fonction f 1-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifie $\displaystyle\sum_{k\in J} |c_k(f)|^2 \leqslant \int_0^1 |f|^2$ pour toute partie finie J de $\mathbb{Z}$: $c(f)$ est donc une famille de carré sommable. Mais $c(f)$ n'est pas toujours sommable : On montre que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ alors $c(f)$ est une famille sommable. Le théorème de Parseval peut s'énoncer sous la forme : *Pour tout couple de fonctions (f,g) continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 1-périodiques, la famille $\Big(\overline{c_k(f)}\,c_k(g)\Big)_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable et sa somme vaut $\displaystyle\int_0^1 \bar{f} g$.*

IV.2 Suites doubles et interversion des sommations

Une suite double est une famille indexée par l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}^2$. Voici deux corollaires du théorème de caractérisation des familles sommables :

Corollaire Interversion des sommations

Soit $u = (u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Si u est sommable, alors les suites $(u_{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ et $(u_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ sont sommables ainsi que les suites de leurs sommes. De plus

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_{i,j}\right).$$

Corollaire Produit de Cauchy de séries]

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries normalement convergentes à valeurs dans une algèbre normée de dimension finie . La série de terme général $(u\star v)_n = \displaystyle\sum_{i+j=n} u_i v_j$ est dite produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Cette série est normalement convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u\star v)_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} v_n\,.$$

Le théorème de caractérisation formule (1.9) pour la famille sommable u et les recouvrements croissants de $\mathbb{N}^2$ par $\Big(\llbracket 0\,,\,n\rrbracket\times\mathbb{N}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}\times\Big(\llbracket 0\,,\,n\rrbracket\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ donnent le corollaire d'interversion (voir la première remarque suivant le théorème).

Le second corollaire est le résultat du théorème de caractérisation formule (1.9) pour la famille sommable $w = (u_i v_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ en prenant le recouvrement croissant de $\mathbb{N}^2$ par les ensembles finis $J_n = \Big(\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leqslant n\}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir la deuxième et la quatrième remarque suivant le théorème).

☞ Propriété de l'exponentielle : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie. Pour tout $a \in \mathcal{A}$ la série exponentielle $\sum \dfrac{a^n}{n!}$ est normalement convergente, donc par produit de Cauchy, pour tout $(a\,,\,b) \in \mathcal{A}^2$,

$$\exp(a)\exp(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{a^i b^j}{i!\,j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i\, a^i b^{n-i}$$

si ab=ba, la formule du binôme donne alors $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$. Et pour $b = -a$, $\exp(a)\exp(-a) = \exp(O_{\mathcal{A}}) = \exp(-a)\exp(a) = 1_{\mathcal{A}}$. Ainsi l'exponentielle est une application de $\mathcal{A}$ à valeurs dans l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{A}$ et pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\big(\exp(a)\big)^{-1} = \exp(-a)$.

☞ *Exemple de suite double (non sommable) où les séries associées aux suites $(u_{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ et $(u_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergent mais où les séries associées aux suites de leurs sommes ne sont pas de même nature :*

Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ posons $u_{i,j} = \dfrac{(-1)^j}{i+j+1}$ si $i \leqslant j$ et $u_{i,j} = 0$ sinon. Ici, pour tout $\forall\, j \in \mathbb{N}$, la somme $s_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} u_{i,j} = (-1)^j \sum_{k=j+1}^{2j+1} \frac{1}{k}$ est le terme général d'une série grossièrement divergente, car $|s_j| \geqslant (j+1)\dfrac{1}{2j+1} \geqslant \dfrac{1}{2}\cdot$ En revanche

$$\forall\, i \in \mathbb{N}\,,\ t_i = \sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j} = (-1)^{i+1} \sum_{k=2i+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

a le signe de $(-1)^i$ et vérifie $|t_i| \leqslant \dfrac{1}{2i+1}$ (théorème des séries alternées) avec

$$|t_i| - |t_{i+1}| = -\sum_{k=2i+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=2i+3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2i+3} > 0\,.$$

Ainsi la suite alternée $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et la suite de ses valeurs absolues décroît, donc $\sum t_i$ converge. Dans cet exemple on peut parler de $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j}$ mais il n'est pas possible d'intervertir les sommations.

☞ Exemple d'interversion des sommations : On établit (voir le chapitre sur les séries de Fourier) que pour tout complexe z non entier relatif :

$$\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{z} - \pi \operatorname{cotan} \pi z\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - z^2}$$

Or pour $|z| < 1$, $\dfrac{1}{k^2 - z^2}$ est la somme d'une série géométrique de raison $\dfrac{z^2}{k^2}$ et de premier terme $\dfrac{1}{k^2}$ si bien que pour $|z| \in]0\,,\,1[$,

$$\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{z} - \pi \operatorname{cotan} \pi z\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{k^{2(n+1)}} = f(z)\,.$$

Or la famille double $u = \left(\dfrac{z^{2n}}{k^{2(n+1)}}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable car les sommes partielles de ses modules sur toute partie finie de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ sont majorées par $f(|z|)$. On peut donc intervertir les sommations : Pour tout complexe non nul du disque unité ouvert,

$$\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{z} - \pi \operatorname{cotan} \pi z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(2n+2) z^{2n}$$

où ζ est la fonction de Riemann définie par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ $(x > 1)\cdot$ En cherchant le développement asymptotique de $\operatorname{cotan} \pi z$ au voisinage de 0, on trouve ainsi les valeurs de $\zeta(2n+2)$. Les premiers calculs donnent

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad , \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \quad \cdots$$

Le changement de z en $\dfrac{z}{\pi}$ montre en fait que $\dfrac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}$ est un nombre rationnel.