La prestation orale se déroule en deux temps. D'abord vous présenterez un sujet que vous avez préparé. Cela permettra au jury de se faire une première impression sur vos connaissances des théorèmes et des propriétés du cours, sur vos méthodes, sur votre acquis en calcul.
Dans les cinq à dix dernières minutes, le jury vous posera une question sur autre point du programme, question baptisé depuis quelques années, question courte. S'il est vrai que la formulation de la question est courte, il est surtout vrai que la réponse du candidat le sera, car le temps imparti ne lui laissera nullement le temps de développer ses propos.
Nous allons donner dans ce qui suit quelques questions courtes telles qu'elles nous ont été rapportées et, tout en complétant, nous avons essayé d'être fidèle aux idées des étudiants qui ont la gentillesse de nous les fournir avec ou sans questions supplémentaires. Il faut savoir que lorsqu'un sujet comporte plusieurs questions, elles ne sont pas toutes données à la fois comme dans l'exercice préparé mais successivement, et une question dépend souvent de la réponse du candidat.
La liste des questions posées ici est très limitée mais vous en trouverez bien d'autres dans le livre : "Mathématiques, le tour du programme en 365 questions" de Bénédicte Bourgeois et Emmanuel Girard aux éditions Ellipses. Nous ferons parfois référence à cet ouvrage en l'indiquant sous les initiales de ses auteurs ***BB & EG*** *.*

Probabilités

1 - On considère n un entier naturel non nul et p un réel, élément de $]0, 1[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
Calculer $P(X=Y)$.

Cette question n'est pas difficile et le jury sera sans pitié à l'égard du candidat qui montrera quelques insuffisances.
Il doit définir les termes de l'énoncé, dans son contexte et non de façon général et théorique, sauf si le jury lui demande.
Les notions abordées sont : lois binomiales, incompatibilité, indépendance ; mais comme nous allons le voir, on peut déborder de ce cadre.
Nous allons présenter ci-dessous, ce que le candidat doit nécessairement faire et prolonger sa réponse par quelques questions. Bien sûr, la liste des prolongement n'est qu'indicative et n'est pas exhaustive.

Réponse

♦ Les variables aléatoires X et Y suivent des lois binomiales de paramètres n et p donc :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$$

On définit :

$$(X=Y) = \left(\bigcup_{0 \le k \le n} (X=k \cap Y=k)\right)$$

Les événements $(X=k \cap Y=k)$ et $(X=j \cap Y=j)$ sont incompatibles lorsque $k \neq j$; donc :

Mathématiques
Voies S et E

Questions sans préparation

François Delaplace, Pierre Girard
Professeurs en classes économiques et commerciales,
lycée Notre-Dame du Grandchamp (Versailles)

$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k\cap Y=k)$$

Les variables X et Y sont indépendantes ; donc :

$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)\cdot P(Y=k)$$

De plus,

$$\forall\ k\in[\![0,n]\!]\ ,\quad P(X=k)=P(Y=k)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}$$

Donc :

$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}\cdot p^{2k}\cdot(1-p)^{2n-2k}\qquad \textbf{(1)}$$

♦ *Si vous avez fait un sans faute jusqu'ici, ce qui est souhaitable, peut-être le jury sera-t-il tenté de vous poser la question suivante, dont la formulation laisse un peu à désirer.*
- "Alors, selon vous, quelle est la probabilité que les deux variables X et Y soient égales ? "
Bien sûr, c'est un piège ; le jury a demandé "la probabilité que les deux variables X et Y soient égales " *et non* "la probabilité de l'événement $(X=Y)$ " *; vous saisissez la différence ?*
Le candidat attentif aura noté que si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, l'événement E : " les deux variables aléatoires X et Y sont égales " n'est pas un élément de $\mathcal{A}$; l'écriture $P(E)$ est donc abusive et il est bien vu de signaler aux examinateurs que nous ne sommes plus dans le même espace probabilisé;

La probabilité de l'événement $(X=Y)$ a été calculé ci-dessus. Si on désigne par p_k la probabilité de l'événement $(X=k)$, on voit que :

$$\forall\ k\in[\![0,n]\!]\ ,\quad 0<p_k<1\quad\text{alors}\quad 0<p_k^2<p_k\quad\text{et}\quad 0<\sum_{k=0}^{n}p_k^2<\sum_{k=0}^{n}p_k=1$$

Ainsi, $P(X=Y)\in]0,1[$; ce qui signifie que l'affirmation " les deux variables X et Y sont presque sûrement égales " est fausse ; par suite, "*la probabilité*" que les deux variables X et Y soient égales est nulle.

♦ On s'en doutait un peu . Au fait, ***deux variables indépendantes peuvent-elles être égales ?***

Pour répondre à cette question, on peut procéder de la façon suivante :
- Soit X et Y deux variables certaines telles que $X(\Omega)=Y(\Omega)=\{\alpha\}$. Les deux variables peuvent-elles être indépendantes ? On a :

$$1=P(X=\alpha\cap Y=\alpha)=P(X=\alpha)\cdot P(Y=\alpha)$$

Donc deux variables certaines de même loi, sont indépendantes. Par ailleurs,

$$\forall\ \omega\in\Omega\ ,\quad X(\omega)=Y(\omega)=\alpha$$

Donc les variables X et Y sont égales.
- Soit X et Y deux variables discrètes indépendantes telles que $\{\alpha,\beta\}\subset X(\Omega)=Y(\Omega)$ et $\alpha\neq\beta$; on a :

$$P(X=\alpha\cap Y=\beta)=P(X=\alpha)\cdot P(Y=\beta)\neq 0$$

donc $P(X=Y)\neq 1$ et par suite, les deux variables X et Y ne peuvent pas être égales.
- Enfin, si X et Y sont des variables à densité ; supposons que $\alpha<\beta$ et $[\alpha,\beta]\subset X(\Omega)=Y(\Omega)$ et soit $\gamma\in]\alpha,\beta[$.

$$P(\alpha<X\leq\gamma\ \cap\ \gamma<Y\leq\beta)=P(\alpha<X\leq\gamma)\cdot P(\gamma<Y\leq\beta)\neq 0$$

donc, $P(X=Y)\neq 1$ et par suite, les deux variables X et Y ne peuvent pas être égales.

♦ *A ce niveau, le candidat a montré qu'il maitrisait bien la partie du cours concernée. Il peut maintenant être amener à prouver sa maitrise du calcul.*
On ne lui demandera pas une réduction de l'expression qu'il a trouvé dans le cas général, même si la question est :
- "Comment vous réduisez l'expression (1) ? "
Il peut alors proposer de la réduire dans le cas particulier où $p=1-p$, soit :

$$\text{Si}\quad p=\frac{1}{2}\quad\text{alors}\quad P(X=Y)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}$$

En utilisant la formule de Vandermonde,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}=\binom{2n}{n}\qquad\text{on obtient}\qquad P(X=Y)=\binom{2n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

Le candidat peut s'attendre à ce qu'on lui demande au moins une méthode pour démontrer cette formule. Ne gachez pas votre excellente prestation par : " Je fais une récurrence"
Le candidat doit savoir démontrer cette formule de deux façons différentes :
- *Utilisation d'une loi hypergéométrique*
- *Développement par la formule du binôme de $(1+x)^{2n}$, par exemple.*

> ***2 - Soit A, B et C trois événements tels que :***
>
> $$P(A)=P(B)=P(C)=p\in]0,1[\qquad\text{et}\qquad P(A\cap B\cap C)=0$$
>
> ***a - Prouver que***
>
> $$p\leq\frac{2}{3}$$
>
> ***Peut-on avoir l'égalité ?***
>
> ***b - On suppose, de plus, que ces événements sont indépendants deux à deux. Montrer que***
>
> $$p\leq\frac{1}{2}$$
>
> ***Peut-on avoir l'égalité ?***

Les deux questions ne sont sans doute pas posées au même candidat car, il est peu probable qu'il parvienne à fournir au jury toutes les idées permettant de traiter la première question ... surtout si celui-ci si prend un peu gauchement.
Dans ce cas, le jury posera les habituelles questions :
- *Qu'est-ce qu'une probabilité ?*
- *Qu'est-ce qu'un espace espace probabilisable ? Qu'est-ce qu'un espace probabilisé ?*
- *Qu'est-ce qu'une algèbre, qu'est-ce qu'une tribu ?*
- *Rappelez-nous les lois de de Morgan*
- *...*

Alors rappelons ce conseil qu'on vous a déjà donné : connaissez bien votre cours.
La tentation de proposer ici, l'utilisation de la formule du crible peut être forte; cédez-y . Nous allons montrer qu'on peut résoudre ce problème par une simple manipulation des formules. Une autre méthode, reposant aussi sur la formule du crible, est proposé dans le livre de ***BB & EG***.

a - On peut écrire :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

soit :

$$P(A\cup B\cup C)=3p-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)\leq 1$$

On a :

$$3p\leq 1+P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)$$

Les événements $A\cap B$ et $A\cap C$ sont incompatibles, donc :

$$3p\leq 1+P(A\cap(B\cup C))+P(B\cap C)$$

Or :

$$A\cap(B\cup C)\subset A$$

donc :

$$3p\leq 1+P(A)+P(B\cap C)$$

et $P(A\cap(B\cap C))=0$ alors $P(A)+P(B\cap C)=P(A\cup(B\cap C))$; en remarquant que $P(A\cup(B\cap C))\leq 1$:

$$3p\leq 1+P(A)+P(B\cap C)=1+P(A\cup(B\cap C))\leq 2$$

On en déduit que :

$$P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)\leq 1 \quad \text{et que} \quad p\leq\frac{2}{3}$$

◆ Peut-on avoir l'égalité ? Ben... heu ... pourquoi pas ? Pour qu'on ait l'égalité, il faut que :

$$P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)=1 \quad \text{et que} \quad P(A\cup B\cup C)=1$$

donc que :

$$P(A\cup(B\cap C))=1 \quad \text{soit} \quad B\cap C=\overline{A}$$

La symétrie existante entre les événements A, B, C nous implique aussi :

$$A\cap B=\overline{C} \quad \text{et} \quad A\cap C=\overline{B}$$

Par exemple, on considére une urne contenant trois boules : une bleue, une verte et une jaune. Une épreuve consiste à extraire une boule de l'urne et de noter sa couleur.

Désignons par A, B et C les événements :

A : la boule obtenue n'est pas bleue

B : la boule obtenue n'est pas verte

C : la boule obtenue n'est pas jaune

De toute évidence :

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P(A\cap B\cap C)=0$$

car les trois boules ont la même chance d'être tirée (ou de ne pas être tirée) et que lors d'un tirage, on est sûr d'avoir au moins l'une des trois couleurs.

b - Par indépendance des événements A, B, C on a : $P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=p^2$

$$P(A\cup B\cup C)=3p-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)=3p-3p^2$$

• On a :

$$A\subset A\cup B\cup C \quad \text{donc} \quad p\leq 3p-3p^2$$

et par suite :

$$3p^2-2p\leq 0 \quad \text{soit} \quad p(3p-2)\leq 0$$

On retrouve le résultat de la première partie :

$$p\leq\frac{2}{3}$$

Bien sûr, il n'y a rien de nouveau avec les relations :

$$B\subset A\cup B\cup C \quad \text{et} \quad C\subset A\cup B\cup C$$

• Remarquons alors qu'on a aussi :

$$A\cup B\subset A\cup B\cup C$$

et

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\,P(B)=2p-p^2$$

donc :

$$2p-p^2\leq 3p-3p^2 \quad \text{soit} \quad 2p^2-p\leq 0$$

On en déduit que :

$$p\leq\frac{1}{2}$$

Ainsi, on a l'implication :

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=P(B)=P(C)=p\in\,]0,1[\\ P(A\cap B\cap C)=0 \\ A, B, C \textit{ sont incompatibles } 2 \text{ à } 2 \end{array}\right\}\Rightarrow p\leq\frac{1}{2}$$

◆ Peut-on avoir l'égalité ? Considérons la situation suivante

Une épreuve consiste à extraire simultanément deux boules d'une urne contenant quatre boules numérotées de 1 à 4. Un événement est une paire d'éléments de $\{1,2,3,4\}$. On considère les trois événements suivants :

$$A=\{1,3\},\quad B=\{1,2\} \quad \text{et} \quad C=\{2,3\}$$

Il est clair que si ces trois événements sont les résultats de trois épreuves indépendantes, alors on a :

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}\ ,\quad P(A\cap B\cap C)=0 \quad \text{et} \quad A, B, C \text{ indépendants deux à deux}$$

3 - *Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On extrait successivement les boules de l'urne avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule dont le numéro est inférieur à celui qui précède.*

On note X_n le nombre de tirages effectués.

Déterminer la loi de X_n.

La suite des numéros obtenus sera une suite croissante d'éléments de $[\![1,n]\!]$. Le candidat se rappelle sans doute, d'avoir déjà traité le cas plus simple, où la suite obtenue est strictement croissante. S'il ne sait pas comment démarrer le sujet, il peut proposer au jury d'étudier d'abord ce cas ; le jury pourra comprendre que le candidat sait passer du cas envisagé au cas demandé. Il pourra s'en assurer et demander tout de suite au candidat de montrer la passerelle entre les deux cas. C'est par là que nous allons commencer.

Réponse

Désignons par $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p$ les numéros obtenus respectivement au premier, au deuxième, ... , au $p-1^{ème}$ tirage et au $p^{ème}$ tirage. L'événement $(X_n\geq p)$ peut s'écrire :

$$(X_n\geq p)=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_p)\in[\![1,n]\!]^p\ /\ x_1\leq x_2\leq\dots\leq x_{p-1}\leq x_p\right\}$$

Sur le modèle des "*Trous de Kaplanski*" on peut proposer la méthode suivante :

Considèrons l'application qui à chaque p-liste $(x_1,x_2,\dots,x_p)$ associe la p-liste $(y_1,y_2,\dots,y_p)$ telle que :

$$\forall\, k\in[\![1,p]\!],\quad y_k=x_k+k-1$$

Si $(x_1,x_2,\dots,x_p)$ est une réalisation de l'événement $(X_n=p)$ alors la p-liste $(y_1,y_2,\dots,y_p)$ est une p-liste strictement croissante d'éléments de $[\![1,\ n+p-1]\!]$.

Réciproquement, si $(y_1,y_2,\dots,y_p)$ est une p-liste strictement croissante d'éléments de $[\![1,\ n+p-1]\!]$, alors la p-liste $(x_1,x_2,\dots,x_p)$ définie par :

$$\forall\, k\in[\![1,p]\!],\quad x_k=y_k-k+1$$

est une suite croissante d'éléments de $[\![1,n]\!]$. En effet,

$$\forall\ k\in[\![1,p-1]\!]\,,\quad x_{k+1}-x_k=y_{k+1}-y_k-k+(k-1)=y_{k+1}-y_k-1$$

Or

$$y_{k+1}-y_k>0\quad\text{donc}\quad x_{k+1}-x_k\geq 0$$

Par ailleurs, $x_p=y_p-p+1\leq(n+p-1)-p+1$ soit $x_p\leq n$ et par suite, pour tout entier $k\in[\![1,p]\!]$ on a $x_k\in[\![1,n]\!]$.
Ainsi, l'événement $(X_n\geq p)$ a la même probabilité que l'événement $(Y_{n+p-1}\geq p)$ où Y_{n+p-1} est la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués si on suppose que l'urne possède $n+p-1$ boules numérotées de 1 à $n+p-1$ et que les tirages s'effectuent toujours avec remise.

◆ Le problème est maintenant le suivant :
Dans une urne contenant $n+p-1$ boules numérotées de 1 à $n+p-1$, on effectue des tirages avec remise d'une boule. On note les numéros dans leur ordre de sortie $y_1, y_2, \dots,$ y_{n+p-1}. On considère la variable aléatoire Y_{n+p-1} égale au rang où, pour la première fois, le numéro obtenu n'est pas supérieur à celui qui précède et on veut déterminer la probabilité de l'événement $(Y_{n+p-1}\geq p)$.
Une réalisation de $(Y_{n+p-1}\geq p)$ est une p-liste strictement croissante d'éléments de $[\![1,n+p-1]\!]$; on en déduit que :

$$P(Y_{n+p-1}\geq p)=\frac{\binom{n+p-1}{p}}{(n+p-1)^p}$$

◆ On en déduit donc :

$$P(X_n\geq p)=\frac{\binom{n+p-1}{p}}{(n+p-1)^p}$$

Il s'ensuit que, pour tout élément $p\in[\![1,p-1]\!]$,

$$p(X_n=p)=P(X_n\geq p)-P(X_n\geq p+1)$$

soit :

$$P(X_n=p)=\frac{\binom{n+p-1}{p}}{(n+p-1)^p}-\frac{\binom{n+p-1}{p+1}}{(n+p-1)^{p+1}}$$

4 - Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.
a - Pour quelle(s) valeur(s) de j a-t-on $P(X=j)$ maximale ?
b - Soit j fixé, $j\in\mathbb{N}^*$; pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda>0$, a-t-on $P(X=j)$ maximale ?
c- Montrer que

$$E(|X-\lambda|)=\frac{2\,e^{-\lambda}\lambda^{\lambda}}{(\lambda-1)!}$$

Rappelons une fois encore que les questions ne se suivent pas comme dans un exercice posé à l'écrit. Elles sont données au coup par coup et souvent en fonction des réponses apportées par le candidat. Ne cherchez pas de lien entre elles ; il n'y en a pas nécessairement . Ainsi, les trois questions sont indépendantes.

Réponse

a - On a :

$$P(X=j)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}$$

- Si $\lambda\in]0,1[$, alors $P(X=0)$ est maximale car, pour tout entier naturel j , $\frac{\lambda^j}{j!}<\frac{1}{j!}\leq 1$.
- Si $\lambda=1$, alors $P(X=0)=P(X=1)$ et pour tout $j\geq 2$, $\frac{\lambda^j}{j!}=\frac{1}{j!}<1$, donc $P(X=j)$

maximale pour $j=0$ ou $j=1$.
- Si $j>1$, alors

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k+1)}\leq 1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{k+1}{\lambda}\leq 1\quad\textbf{(*)}$$

par suite, $\lambda\geq k+1$, donc $k\leq\lambda-1$. On notera, en particulier, que cette inégalité est stricte si $\lambda\notin\mathbb{N}^*$.
D'après l'inégalité **(*)** , pour toute valeur de $\lambda>1$ et pour tout entier naturel k tel que $k\leq\lambda-1$,

$$P(X=k)\leq P(X=k+1)$$

Dès que $k\geq\lambda$, $P(X=k)>P(X=k+1)$.
On peut conclure :
d'une part, que le maximum de $P(X=j)$ est obtenu pour une valeur de j inférieure ou égal à λ .
d'autre part, que
- si $\lambda\in\mathbb{N}^*$, $P(X=\lambda-1)=P(X=\lambda)$ est maximale ; donc $P(X=j)$ est maximale pour $j=\lambda$ et $j=\lambda-1$.
- si $\lambda\notin\mathbb{N}^*$, pour $k\leq\lfloor\lambda-1\rfloor$, on a $P(X=k)<p(X=k+1)$. Il s'ensuit que $P(X=j)$ est maximale pour $j=\lfloor\lambda-1\rfloor+1=\lfloor\lambda\rfloor$.

b - Etudions les variations de

$$\lambda\mapsto f_j(\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}$$

pour $j\in\mathbb{N}^*$ fixé. Cette fonction est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ comme produit d'une fonction puissance $\left(\lambda\mapsto\lambda^j\right)$ et d'une fonction exponentielle $\left(\lambda\mapsto\frac{1}{j!}\cdot e^{-\lambda}\right)$.
Pour tout $\lambda>0$, on a :

$$f_j'(\lambda)=\frac{\lambda^{j-1}}{j!}(j-\lambda)e^{-\lambda}$$

Les variations de f_j peuvent être résumées dans le tableau ci-dessous :

λ	0	j	$+\infty$
$f_j'(\lambda)$	$+$	0	$-$
f_j	0 ↗	$f_j(j)$	↘ 0

Le maximum de $P(X=j)$ est obtenu lorsque $\lambda=j$. Ce maximum est alors :

$$P(X=j)=e^{-j}\frac{j^j}{j!}$$

c - *Pour traiter cette question, nous allons utiliser un résultat bien connu :*

♦ ***Si Y est une variable discrète centrée à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et ayant une espérance $E(Y)$, alors***

$$E(|Y|) = 2\sum_{k\geq 0} k\,P(Y=k) = 2\sum_{k\leq 0} k\,P(Y=k)$$

• Justifions :

Nous allons considérer $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$, quitte à considérer comme nulles les probabilités de certains événements $(Y=k)$.

Nous avons :

$$\sum_{k\leq 0} k\,P(Y=k) = \sum_{k<0} k\,P(Y=k)$$

car $k\,P(Y=k) = 0$ lorsque $k=0$. Donc :

$$0 = E(Y) = \sum_{k\leq 0} k\,P(Y=k) + \sum_{k\geq 0} k\,P(Y=k)$$

Donc

$$\sum_{k\leq 0} -k\,P(Y=k) = \sum_{k\geq 0} k\,P(Y=k)$$

Soit :

$$\sum_{k\leq 0} |k|\,P(Y=k) = \sum_{k\geq 0} |k|\,P(Y=k)$$

Par suite :

$$E(|Y|) = \sum_{k\leq 0} |k|\,P(Y=k) + \sum_{k\geq 0} k\,P(X=k) = 2\sum_{k\geq 0} |k|\,P(Y=k) = 2\sum_{k\geq 0} |k|\,P(Y=k)$$

♦ Démontrons désormais la relation.

Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$; la variable $X-\lambda$ est une variable centrée, donc

$$E(|X-\lambda|) = 2\sum_{k=0}^{\lambda-1} (\lambda-k)\,P(X=k)$$

soit :

$$E(|X-\lambda|) = 2\left(\sum_{k=0}^{\lambda-1} \lambda\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\lambda-1} k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right)$$

On réduit, on simplifie en remarquant que :

$$\sum_{k=0}^{\lambda-1} k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\lambda-1} k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\lambda-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

et on obtient :

$$E(|X-\lambda|) = 2\left(\sum_{k=0}^{\lambda-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{k!} - \sum_{k=1}^{\lambda-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right)$$

Après glissement d'indice dans la deuxième somme :

$$E(|X-\lambda|) = 2\left(\sum_{k=0}^{\lambda-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{k!} - \sum_{k=0}^{\lambda-2} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{k!}\right) = 2\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^\lambda}{(\lambda-1)!}$$

Vous avez bien répondu à cette dernière question, alors que pensez-vous de celle qui suit ?

Soit λ un entier naturel non nul. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sum_{j\geq 0} j\,\frac{x^j}{j!}$$

et on note $F_1, F_2, \ldots, F_\lambda$ les primitives de f qui s'annule en 0. Calculer $F_\lambda(\lambda)$.

On a :

$$f(x) = \sum_{j\geq 1} j\,\frac{x^j}{j!} = x\sum_{j\geq 1}\frac{x^{j-1}}{(j-1)!} = x\sum_{j\geq 0}\frac{x^j}{j!}$$

donc

$$f(x) = x\,e^x$$

Le cours sur la série exponentielle nous enseigne qu'on peut l'intégrer indéfiniment terme à terme ; pour tout réel x positif ou nul :

$$F_1(x) = \sum_{j\geq 0} j\,\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\ ,\quad F_2(x) = \sum_{j\geq 0} j\,\frac{x^{j+2}}{(j+2)!}\ ,\ \ldots\ ,\quad F_\lambda(x) = \sum_{j\geq 0} j\,\frac{x^{j+\lambda}}{(j+\lambda)!}$$

♦ *Donnons l'expression de $F_\lambda(x)$ en fonction de x.*

On voit que :

$$F_1(x) = \int_0^x t\cdot e^t\,dt = 1 + (x-1)\,e^x\ ,\quad F_2(x) = \int_0^x 1 + (t-1)\cdot e^t\,dt = 2 + x + (x-2)\,e^x$$

Puis,

$$F_3(x) = \int_0^x 2 + t + (t-2)\,e^t\,dt = 3 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + (x-3)\,e^x$$

et encore :

$$F_4(x) = 4 + 3x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + (x-4)\,e^x$$

Stop ! On en a assez pour conjecturer l'expression de $F_k(x)$. Le terme exponentielle de $F_k(x)$ est $(x-k)\,e^x$ (pas trop dur à voir !) ; ainsi on a :

$$F_k(x) = P_k(x) + (x-k)\,e^x$$

où P_k est un polynôme de degré $k-1$. Par ailleurs, $P_k(0) = k$. En intégrant, ce terme devient $k\cdot x$ et le terme constant du polynôme P_{k+1} est $k+1$.

On peut donc conjecturer

$$P_k(x) = k + (k-1)\,x + \frac{k-2}{2!}x^2 + \frac{k-3}{3!}x^3 + \ldots + \frac{k-(k-1)}{(k-1)!}x^{k-1}$$

On vérifie immédiatement cette expression par intégration.

Ainsi :

$$\forall\, x \in [0,+\infty[\ ,\quad F_\lambda(x) = \sum_{j\geq 0} j\,\frac{x^{j+\lambda}}{(j+\lambda)!} = \sum_{k=0}^{\lambda-1}\frac{\lambda-k}{k!}x^k + (x-\lambda)\,e^x$$

On peut aussi l'écrire sous la forme :

$$F_\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\lambda-1}\left(\frac{\lambda}{(k-1)!} - \frac{k}{k!}x\right)\cdot x^{k-1} + \frac{\lambda}{(\lambda-1)!}x^{\lambda-1} + (x-\lambda)\,e^x$$

Il est clair que

$$F_\lambda(\lambda) = \frac{\lambda^\lambda}{(\lambda-1)!}$$

1 - *Déterminer un équivalent en $+\infty$ de*

$$F(x) = \int_0^x |\sin t|\, dt$$

Question ne nécessitant pas beaucoup de réflexion, juste un peu de mémoire de ce qui a été dit ou fait dans le courant de l'année.
Lorsqu'on doit prendre l'intégrale d'une fonction périodique, on utilise la relation de Chasles ; concrétement, on divise notre intervalle d'intégration en une réunion d'intervalles tels que chacun, sauf éventuellement le dernier, ait pour longueur, le réel T égal à une période de la fonction.
Il s'agit donc là d'une petite question pouvant amener toute une discution sur les intégrales de fonctions périodiques, les valeurs moyennes, les liens entre équivalents et intégrales, ou encore entre intégrales et séries, autant de notions qu'on vous invite à revoir en préparant cet exercice.

Réponse

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\sin(x)|$ est continue sur $\mathbb{R}$; par suite, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On note F la primitive de f qui s'annulle en 0 ; on se propose d'abord de la calculer.
Pour tout réel $x > 0$, il existe un entier naturel n et un réel $r \in [0, \pi[$ tel que $x = n\pi + r$. On a :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt + \int_{n\pi}^{x} |\sin t|\, dt \qquad \text{et} \qquad n = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$$

soit :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [-\cos t]_{k\pi}^{(k+1)\pi} + (-1)^n [-\cos t]_{n\pi}^{x}$$

On a donc :

$$F(x) = 2n + 1 - (-1)^n \cos x = 2n + o(n)$$

Par suite :

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 2n \qquad \text{soit} \qquad F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 2\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$$

La réponse ci-dessus est satisfaisante, mais on peut mieux faire :

$$\forall\, u \in [1, +\infty[, \qquad \lfloor u \rfloor \le u < \lfloor u \rfloor + 1$$

donc :

$$1 - \frac{1}{u} < \frac{\lfloor u \rfloor}{u} \le 1$$

et par suite

$$\lfloor u \rfloor \underset{u \to +\infty}{\sim} u$$

Donc

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2x}{\pi}$$

Oui bien sûr, c'est un peu court, mais comme on vous l'a dit, ça peut être le début d'une série de questions dans la limite du temps disponibles.
En voici un échantillon parmi les plus connues.

a - *Soit f une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$ ($T > 0$) ; montrer que pour tout réel a,*

$$\int_a^{a+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt$$

Réciproquement, soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T un réel strictement positif tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt$$

La fonction f est-elle périodique ?

On écrit :

$$\int_a^{a+T} f(t)\, dt = \int_a^0 f(t)\, dt + \int_0^T f(t)\, dt + \int_T^{a+T} f(t)\, dt \qquad \textbf{(1)}$$

Sur l'intégrale

$$\int_T^{a+T} f(t)\, dt$$

effectuons le changement de variable $u = t - T$; concrétement, on considère la fonction affine $t \mapsto u = t - T$; elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. On a :

$$\int_T^{a+T} f(t)\, dt = \int_0^a f(u+T)\, du$$

La fonction f étant T-périodique, on en déduit que :

$$\int_0^a f(u+T)\, du = \int_0^a f(u)\, du$$

Il s'ensuit que :

$$\int_T^{a+T} f(t)\, dt = \int_0^a f(u)\, du \quad \text{et aussi que} \quad \int_a^0 f(t)\, dt + \int_T^{a+T} f(t)\, dt = 0$$

Donc, la relation **(1)** devient :

$$\int_a^{a+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt$$

- *Réciproquement*, si pour tout réel a on a :

$$\int_a^{a+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt$$

on en déduit que la fonction

$$\Phi : x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\, dt$$

est une fonction constante. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x+T) - f(x) = 0$$

Donc f est bien une fonction périodique, de période T.

b - *Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$ ($T > 0$) ; à quelle condition la fonction définie par :*

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$$

est-elle T-périodique ?

La fonction f est continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$. On en déduit, d'après la question récédente, que si F désigne la primitive de f qui s'annulle en 0, alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x+T) - F(x) = \alpha \quad \text{où} \quad \alpha = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

On peut supposer $\alpha \geq 0$, quitte à changer le signe de f.
Si $\alpha = 0$, alors la fonction F est T-périodique, sinon, soit $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, \alpha[$ tels que $x = nT + r$. On a alors :

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{nT}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t & si\ x \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{-kT}^{-(k+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{nT}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

soit :

$$F(x) = \begin{cases} n\,\alpha + F(r) & si\ x \geq 0 \\ -n\,\alpha + F(r) & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Il est clair que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ et la fonction F n'est pas périodique.

c - Soit f une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$ $(T > 0)$; à quelle condition la fonction définie par :

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

a-t-elle un équivalent en $+\infty$?

Ben oui, bien sûr ; une fonction est toujours équivalente à elle même en $+\infty$! Il est clair que la question est plutôt de savoir si la fonction peut avoir *un équivalent simple* en $+\infty$, c'est-à-dire de la forme $c\,x$ où c est une constante.
Si la fonction F est périodique, donc si

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \quad \text{et} \quad \alpha = 0$$

la fonction F n'a pas *d'équivalent simple* en $+\infty$. Sinon,

$$\forall\, x \in [0, +\infty[\,, \quad F(x) = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor \cdot \alpha + F(r)$$

On en déduit, comme ci-dessus, que :

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor \cdot \alpha \quad \text{et donc aussi} \quad F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha\, x}{T}$$

Autre énoncé possible
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\sin(x)|$.
a - Montrer que cette fonction a des primitives sur $\mathbb{R}$.
b - Soit F l'une d'entre-elle ; montrer que si F est périodique alors toute autre primitive de f l'est aussi.
c - Calculer la primitive F_0 de f qui s'annulle en 0. Les primitives de f sont-elles périodiques ?
d - Déterminer, s'il existe, un équivalent simple de F_0 en $+\infty$.

Les réponses a chacune de ces questions figurent dans l'exposé ci-dessus et nous laissons le soin au préparationnaire de les retrouver.

2 - Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $D_f =]0, +\infty[^2$ par :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{x\,y}$$

Préciser, s'ils existent les extrema de f.

Le candidat vigilant aura remarqué que l'examinateur a demandé les extrema (éventuels) de f, et non ces extrema locaux. Le candidat a souvent tendance à se lancer dans un calcul de points critiques, et après avoir donné les conditions du premier ordre, à vérifier les conditions du second ordre. Ce que le jury attend, c'est la seconde partie : pourquoi cet extremum local est en fait un extremum global .

Réponse

◆ *Recherchons les points critiques de f.*

La fonction f est de classe C^1 sur son ensemble de définition. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\,x - \frac{a}{x^2\,y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\,y - \frac{a}{x\,y^2}$$

soit

$$2\,x^3\,y = 2\,y^3\,x = a$$

Donc $x\,y\,(x^2 - y^2) = 0$ et, comme $x \neq 0$ et $y \neq 0$, $x = y$ ou $x = -y$.
Si $x = y$, alors :

$$2\,x - \frac{a}{x^3} = 0 \quad \text{donc} \quad x = y = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Si $x = -y$, alors :

$$2\,x + \frac{a}{x^3} = 0$$

impossible puisque $a > 0$ et $x > 0$.
Il en résulte que si la fonction f admet un extremum, alors il est atteint au point $A = (\alpha, \alpha)$ avec $\alpha = \sqrt[4]{\dfrac{a}{2}}$.

◆ Calculons les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + \frac{2\,a}{x^3\,y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 + \frac{2\,a}{y^3\,x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) = \frac{a}{x^2\,y^2}$$

En utilisant les notations de Monge au point critique :

$$r = 2 + \frac{2\,a}{\frac{a}{2}} = 6, \quad s = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2 \quad \text{et} \quad t = 2 + \frac{2\,a}{\frac{a}{2}} = 6$$

On a :

$$r\,t - s^2 = 36 - 4 > 0$$

On peut donc en déduire que $f(A)$ est un extremum. Par ailleurs, $r > 0$, donc cet extremum est un minimum.

◆ Notre problème est maintenant de savoir s'il s'agit d'un minimum absolu.
La fonction f est de classe C^2 sur l'ouvert convexe $D_f =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$; pour que $f(A)$ soit un extremum, il suffit que la forme quadratique

$$(h,q) \mapsto r h^2 + 2 s h k + t k^2$$

soit positive sur D_f. Or, pour tout élément $(x,y) \in D_f$,

$$rt - s^2 = \left(2 + \frac{2a}{x^3 y}\right)\left(2 + \frac{2a}{y^3 x}\right) - \frac{a^2}{x^4 y^4}$$

Soit :

$$rt - s^2 = 4 + \frac{4a}{x^3 y} + \frac{4a}{x y^3} + \frac{3a^2}{x^4 y^4} > 0$$

et par ailleurs, pour tout couple $(x,y) \in D_f$, $r > 0$, donc $f(\alpha,\alpha)$ est un minimum global de f.

3 - *Déterminer, si elle existe*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k e^{\frac{k}{2n}}$$

Là vraiment, on ne voit pas où le jury veut en venir ; par ailleurs le candidat n'a pas été assez rapide dans ses calculs pour qu'on ait la suite de cet énoncé.
Disons que le candidat qui n'a pas repéré ici la somme des termes d'une suite géométrique est mal parti, mais celui qui ne souvient plus de ces formules n'a aucune chance de trouver grâce aux yeux du jury ; les spectateurs pourront assister en direct à sa lapidation.

Réponse

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k e^{\frac{k}{2n}} = \sum_{k=0}^{2n} \left(-e^{-\frac{1}{2n}}\right)^k = \frac{1 - \left(-e^{\frac{1}{2n}}\right)^{2n+1}}{1 + e^{\frac{1}{2n}}} = \frac{1 + e \cdot e^{\frac{1}{2n}}}{1 + e^{\frac{1}{2n}}}$$

Donc

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k e^{\frac{k}{2n}} = \frac{1 + e \cdot e^{\frac{1}{2n}}}{2n \cdot \left(1 + e^{\frac{1}{2n}}\right)}$$

On a :

$$\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{2n}} = 1$$

donc

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k e^{\frac{k}{2n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1 + e}{4n}$$

et par suite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k e^{\frac{k}{2n}}\right) = 0$$

Ben oui, c'est tout ; vous vous attendiez à quoi ? Bon d'accord, puisque vous insistez, on va se mettre dans la peau du jury et imaginer deux petites questions, histoire de donner du volume à un sujet qui n'en a pas.

a - *Donner une fonction $s(n : integer) : real$ en Pascal renvoyant le réel*

$$s_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k e^{\frac{k}{2n}}$$

◆ On peut donner par exemple :

```
function  s(n : integer) : real;
var
   k : integer ;
   u , v : real ;
begin
   u : = 1 ;  v : = -exp(1 / 2 n) ;
   for  k := 1  to  2 n  do
   begin
        u : = u + v ;
        v : = v * (-exp(1 / 2 n)) ;
   end;
   s : = u / (2 n) ;
end ;
```

b - *Calculer de deux façons la limite de*

$$S_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} e^{\frac{k}{2n}}$$

On peut penser à la méthode des rectangles (dailleurs ici on doit y penser, sinon on aura du mal à répondre à cette question) ; on l'exposera de deux façons différentes : d'une part, en utilisant le théorème, d'autre part, en utilisant la monotonie de la fonction exponentielle. Nous ne reviendrons pas sur le calcul de la limite en effectuant la somme des termes d'une suite géométrique.

◆ La fonction

$$f : x \mapsto e^x$$

est continue sur $[0,1]$, donc la suite

$$\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} e^{\frac{k}{2n}}\right)_{n \geq 1}$$

est convergente, et de plus :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} e^{\frac{k}{2n}}\right) = \int_0^1 e^t \, dt = e - 1$$

◆ La fonction f définie ci-dessus est croissante sur $[0,1]$. Soit $x \in [0,1]$,

$$\exists\, k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\} \quad \frac{k}{2n} \leq x \leq \frac{k+1}{2n}$$

donc

$$e^{\frac{k}{2n}} \leq e^x \leq e^{\frac{k+1}{2n}}$$

En intégrant sur $\left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right]$ on obtient :

$$\frac{1}{2n}\, e^{\frac{k}{2n}} \leq \int_{\frac{k}{2n}}^{\frac{k+1}{2n}} e^x \, dx \leq \frac{1}{2n}\, e^{\frac{k+1}{2n}}$$

soit, en sommant :

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} e^{\frac{k}{2n}} \leq \sum_{k=0}^{2n}\int_{\frac{k}{2n}}^{\frac{k+1}{2n}} e^x \, dx \leq \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} e^{\frac{k+1}{2n}}$$

c'es-à-dire :

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} e^{\frac{k}{2n}} \leq \int_0^1 e^x \, dx \leq \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} e^{\frac{k}{2n}} \leq \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n} e^{\frac{k}{2n}} \qquad \text{et}$$

$$\sum_{k=0}^{2n-1} e^{\frac{k}{2n}} = \sum_{k=0}^{2n} e^{\frac{k}{2n}} - 1$$

Donc :

$$\int_0^1 e^x \, dx \leq \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n} e^{\frac{k}{2n}} \leq \frac{1}{2n} + \int_0^1 e^x \, dx$$

Par un célèbre théorème de gendarmerie, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n} e^{\frac{k}{2n}} = \int_0^1 e^t \, dt = e - 1$$

4 - On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)^{\frac{1}{x-2}}$$

a - Quel est l'ensemble de définition de f ?
b - Quelle valeur attribuer à $f(2)$ pour que la fonction soit continue en 2 ?
c - Donner la représentation graphique de f au voisinage de 2.

Cette question est calculatoire et mettra assez peu en relief les qualités mathématiques du candidat. Cela ne signifie pas qu'il faut faire l'impasse dessus. Elles peuvent tomber, la preuve, et elles permettent de voir si le candidat a bien assimilé les études locales de fonctions. Si les développements limités sont la pièce maîtresse de cette question, il n'est pas exclus que le jury cherche à savoir si le candidat qu'il a en face de lui, a une idée précise de la notion d'équivalent.

Réponse

a - La fonction n'est pas une fonction puissance mais une fonction exponentielle ;

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = e^{\frac{1}{x-2}\ln(x-1)}$$

Donc $D_f =]1, 2[\cup]2, +\infty[$.

b - Déterminons la limite de la fonction en 2 . On a :

$$\frac{\ln(x-1)}{x-2} = \frac{\ln(1+(x-2))}{x-2}$$

et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ implique que

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(1+(x-2))}{x-2} = 1 \quad \text{et aussi} \quad \lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x-2} = 1$$

Pour que f soit continue en 2 , il suffit de poser $f(2) = e$.

c - On va étudier la dérivabilité de f en 2, donner l'équation de sa tangente éventuelle au point de la courbe de coordonnées $(2, f(2))$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente.
Pour ce faire, on va donner un développement limité de f en 2 , à l'ordre 2.
On remarque que

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = g(u) = e^{\frac{\ln(1+u)}{u}} \quad \text{avec} \quad u = x-2$$

Il est clair que u tend vers 0 quand x tend vers 2.
On a :

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

On a alors :

$$\frac{\ln(1+u)}{u} \underset{u\to 0}{=} \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} + o(u^2)$$

Par suite, au voisinage de 0 :

$$e^{\frac{\ln(1+u)}{u}} = e^1 \cdot e^{-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+o(u^2)} = e\cdot\left[1 + \left(-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+o(u^2)\right) + \left(-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+o(u^2)\right)^2\right]$$
$$+\, o\left(\left(-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+o(u^2)\right)^2\right)$$

et :

$$o\left(\left(-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+o(u^2)\right)^2\right) \underset{u\to 0}{=} o(u^2)$$

Par suite :

$$e^{\frac{\ln(1+u)}{u}} = e\cdot\left[1 + \left(-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}\right) + \left(-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}\right)^2\right] + o(u^2)$$

soit :

$$e^{\frac{\ln(1+u)}{u}} = e\cdot\left[1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} + \frac{u^2}{4}\right] + o(u^2)$$

Finalement :

$$e^{\frac{\ln(1+u)}{u}} = e - \frac{e}{2}\, u + \frac{7\,e\,u^2}{12} + o(u^2)$$

Pour $u = x-2$, on a :

$$f(x) = e - \frac{e}{2}(x-2) + \frac{7\,e\,(x-2)^2}{12} + o((x-2)^2)$$

qu'on peut aussi écrire :

$$f(x) = e - \frac{e}{2}(x-2) + \frac{7\,e\,(x-2)^2}{12}(1+\varepsilon(x-2)) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 2}\varepsilon(x-2) = 0 .$$

Il s'ensuit que la fonction f est dérivable en 2, que $f'(2) = -e$, que la tangente T à la courbe au point de coordonnées $(2, f(2))$ a pour équation :

$$y = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}(x-2) \quad \text{soit} \quad y = -\frac{\mathrm{e}}{2}x + 2\,\mathrm{e}$$

On remarque que :

$$f(x) - \left(-\frac{\mathrm{e}}{2}x + 2\,\mathrm{e}\right) = \frac{7\,\mathrm{e}\,(x-2)^2}{12}\left(1 + \varepsilon(x-2)\right)$$

On a :

$$\lim_{x \to 2}\left(1 + \varepsilon(x-2)\right) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{(x-2)^2}{3} \geq 0$$

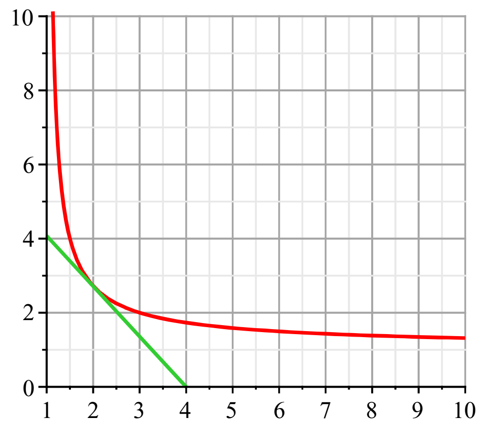
Donc, il existe un voisinage de 2 sur lequel $1 + \varepsilon(x-2) > 0$. Sur ce voisinage,

$$f(x) - \left(-\frac{\mathrm{e}}{2}x + 2\,\mathrm{e}\right) \geq 0$$

et la courbe de f est, localement, au dessus de sa tangente.

Représentation graphique

La courbe de la fonction f ainsi que sa tangente au point d'abscisse 2 sont représentées ci-dessous



Algèbre

1 - *Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n. On suppose que :*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \|e_i - e_j\| = 1$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E.

Nous allons aborder cette question en utilisant la matrice $G = \left(\langle e_i, e_j\rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ appelée matrice de Gramm de la famille $\mathcal{F}$.

Aucune connaissance sur ces matrices n'est exigible, mais le candidat doit savoir que

- un produit scalaire est invariant dans toute base orthonormée, c'est-à-dire ne dépend pas de la base orthonormée dans laquelle il est calculé

- La matrice G définie ci-dessus par $G = \left(\langle e_i, e_j\rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est égale au produit ${}^t\!A\,A$ où A désigne la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans une base orthonormée

Le candidat doit aussi savoir déterminer rapidement les éléments propres des matrices de la forme:

$$\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

Nous reviendrons sur ces trois points dans les questions supplémentaires.

Réponse

On a :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \|e_i - e_j\|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 - 2\,\langle e_i, e_j\rangle = 1$$

et par suite :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle e_i, e_j\rangle = \frac{1}{2}$$

Ainsi, la matrice de Gramm de la famille $\mathcal{F}$, c'est-à-dire la matrice $\left(\langle e_i, e_j\rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est de la forme :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}J + \frac{1}{2}I \quad \text{avec} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

On a immédiatement :

$$J^2 = n\,J$$

donc les valeurs propres possibles de J sont 0 et n. Il est clair que la matrice J est de rang 1 ; par suite, 0 est une valeur propre de J d'ordre $n-1$ et n est une valeur propre de J d'ordre 1. Donc $2\,G - I$ admet 0 et n comme valeurs propres :

$$(2\,G - I) - \lambda\,I \text{ non inversible si, et seulement si,} \quad \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = n$$

$$G - \frac{\lambda + 1}{2}\,I \text{ non inversible, si, et seulement si,} \quad \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = n$$

Ainsi les valeurs propres de G sont $\frac{1}{2}$, d'ordre de multiplicité égal à $n-1$, et $\frac{n+1}{2}$ comme valeur propre simple.

Conséquence :

Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée et A la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$G = {}^tA\,A$$

et G est de rang n donc inversible. Il s'ensuit que la matrice A est aussi inversible et donc que $\mathcal{F}$ est une base de E.

Quelques points incontournables sous forme de questions

a - *Justifier qu'un produit scalaire est invariant dans toute base orthonormée.*

C'est immédiat : dans toute base orthonormée, la matrice du produit scalaire est l'identité ; si P désigne la matrice d'une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ à une autre $\mathcal{B}_2$, cette matrice est orthogonale et donc $P^{-1} = {}^tP$.

Soit U_1, U_2 d'une part et V_1, V_2 les coordonnées respectives des vecteurs u et v dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Notons $\langle u, v\rangle_{\mathcal{B}}$ le produit scalaire de ces deux vecteurs dans la base orthonormée $\mathcal{B}$. On a :

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{B}_1} = {}^tU_1\,V_1 = {}^t(P\,U_2)\,(P\,V_2) = {}^tU_2\,({}^tP\,P)\,V_2 = {}^tU_2\,V_2 = \langle u, v\rangle_{\mathcal{B}_2}$$

Ainsi, le produit scalaire de deux vecteurs est indépendant de la base canonique dans laquelle il est calculé.

b - *Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice dans une base orthonormée d'une famille de p vecteurs d'un espace euclidien de dimension n, alors ${}^tA\,A$ est la matrice de Gramm de ces vecteurs, c'est-à-dire la matrice $(\langle u_i, u_j\rangle)_{1\le i,j\le p}$.*

Là encore, c'est immédiat : la $i^{ème}$ ligne de la matrice ${}^tA$ est la matrice transposée de la $i^{ème}$ colonne de la matrice A, c'est-à dire la matrice transposée ${}^tU_i$ du vecteur u_i dans la base canonique. Ainsi, le produit de la $i^{ème}$ ligne de ${}^tA$ par la $j^{ème}$ colonne de A est le produit de la matrice transposée de u_i par la matrice de u_j, c'est-à-dire ${}^tU_i\,U_j$, donc le produit scalaire $\langle u_i, u_j\rangle$.

c - *Quels sont les éléments propres des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

$$M = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix} \quad \text{et } b \neq 0 \text{ ?}$$

Pour information, ces matrices sont des matrices particulières de la famille des matrices à diagonale constante appelées de *Toeplitz*.

Toutes ces matrices M sont symétriques réelles, donc diagonalisables.

- Interessons-nous d'abord au cas particulier $a = b = 1$.

Dans ce cas, la matrice M est la matrice J donnée ci-dessus et elle s'écrit :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

On a immédiatement :

$$J^2 = n\,J$$

donc les valeurs propres possibles de J sont 0 et n. Il est clair que la matrice J est de rang 1 ; par suite, 0 est une valeur propre de J d'ordre $n-1$; il s'ensuit que n est une valeur propre de J d'ordre 1.

On considère l'endomorphisme f dont la matrice est J dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que les espaces propres E_0 et E_n associés respectivement aux valeurs propres 0 et n sont :

$$E_0 = Vect(e_1 - e_2, e_1 - e_3, ..;, e_1 - e_n) \quad \text{et} \quad E_n = Vect(e_1 + e_2 + \dots + e_n)$$

La matrice semblable à J dans la base $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, ..;, e_1 - e_n, e_1 + e_2 + \dots + e_n)$ est :

$$J' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$$

- Si $a = b \neq 0$ alors $M = a\,J$.

La matrice J admet 0 et n pour valeurs propres, d'ordre de multiplicités respectives, $n-1$ et 1. Donc

$$a\,J - \lambda\,I = a\left(J - \frac{\lambda}{a}\,I\right) \text{ non inversible si, et seulement si } \frac{\lambda}{a} = 0 \text{ ou } n$$

Par suite, les valeurs propres de $a \cdot J$ sont 0 et $a\,n$, d'ordre de multiplicités respectives $n-1$ et 1.

- Si $a \neq b$ alors

$$M = b\,J + (a-b)\,I$$

La matrice $M - \lambda\,I$ est non inversible si, et seulement si,

$$b\,J - (\lambda + b - a)\,I \text{ non inversible}$$

et aussi

$$J - \frac{\lambda + b - a}{b}\,I \text{ non inversible}$$

Ainsi $\frac{\lambda + b - a}{b}$ est une valeur propre de J, c'est à dire 0 ou n. Il s'ensuit que les valeurs propres de J sont :

$$a - b \text{ d'ordre } n-1 \quad \text{et} \quad a + (n-1)\,b \text{ d'ordre } 1$$

et que les espaces propres associés sont encore respectivement

$$E_{a-b} = Vect(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n) \quad \text{et} \quad E_{a+(n-1)b} = Vect(e_1 + e_2 + \dots + e_n)$$

La matrice M' semblable à M dans la base $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, ..;, e_1 - e_n, e_1 + e_2 + \dots + e_n)$ est :

$$M' = \begin{bmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a+(n-1)b \end{bmatrix}$$

2 - *Soit u et v deux endomorphismes de $E = \mathbb{R}^2$, de matrices respectives A et B dans la base canonique de E.*
On suppose que

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a - v peut-il être bijectif ? Quelle est son image ?
b - Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$
c - Donner la forme des matrices A et B.

Sans difficulté. Les questions sont posées les unes après les autres et non toutes ensembles comme nous le faisons ici. Cela empêche le candidat de voir où on veut en venir. Compte tenu de la simplicité des questions, il est très probable que le jury ne fera aucun cadeau.
Thèmes abordés : Noyau et image d'un endomorphisme, dimension de ces sous-espaces ; matrice d'un endomorphisme, produit de matrices et composition d'endomorphismes.

Réponse

a - Si v est bijective, alors B est inversible ; par suite :

$$A = (AB)B^{-1} = 0\,B^{-1} = 0$$

mais alors $BA = 0$ ce qui est faux. Donc, la matrice B est non inversible et v est non bijective.
♦ Montrons que $rg(v) = 1$.
Puisque v n'est pas bijective, le rang de v est inférieur ou égal à 1. Le rang de v n'est pas 0 sinon la matrice B serait nulle et par suite la matrice BA aussi, ce qui n'est pas.
Donc $rg(v) = 1$. Par ailleurs, l'écriture de la matrice BA montre que $v\big(u(e_2)\big) = e_1$ et donc que le vecteur e_1 est un élément de $\mathrm{Im}(v)$. Par suite :

$$\mathrm{Im}(v) = Vect(e_1)$$

b - Soit $x \in E$ tel que $v(x) = \alpha e_1$ pour un réel $\alpha \neq 0$. On sait qu'un tel vecteur et qu'un tel réel existent, d'après la question précédente ; il suffit de prendre $x = u(e_2)$.
La matrice AB étant nulle, il s'ensuit que $u(v(x)) = u(\alpha e_1) = 0$ et par suite, $u(e_1) = 0$. Donc $e_1 \in \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Dim\,Ker}(u) \geq 1$. Comme la matrice A n'est pas nulle, sinon la matrice BA le serait aussi, il s'ensuit que $\mathrm{Dim\,Ker}(u) < 2$; par suite, $\mathrm{Dim\,Ker}(u) = 1$ et

$$\mathrm{Ker}(u) = Vect(e_1)$$

c - D'après les deux questions précédentes, il existe des réels a et b non tous deux nuls, et des réels c et d non tous deux nuls tels que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voyons si on peut affiner :

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le premier produit nous apprend rien de nouveau ; le second nous donne la relation $ac + bd = 1$.
On peut donc conclure :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad ac + bd = 1$$

Question complémentaire :
Est-il est possible de trouver des matrices A et B telles que :

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Nous allons aborder le sujet sous un angle totalement différent.
♦ Le candidat doit savoir qu'on a :

$$\forall\ (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \qquad trace(AB) = trace(BA)$$

Il doit même savoir prouver cette propriété dans le cas général. Rappelons rapidement les grandes lignes de cette démonstration qu'on peut trouver dans les moindres détails dans les ouvrages et dans les cours de première année.

$$A = (a_{i,j})_{i,j} \quad \text{et} \quad B = (b_{i,j})_{i,j} \quad \text{alors} \quad (AB) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{i,j} \quad \text{et}$$

$$(BA) = \left(\sum_{l=1}^{n} b_{i,l} a_{l,j}\right)_{i,j}$$

Donc

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}$$

En posant $i = l$ et $k = i$ et en permutant les sommes, on obtient :

$$tr(AB) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{l,i} b_{i,l} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{i,l} a_{l,i} = tr(BA)$$

Dans le cas présent, si A et B vérifient **(1)** alors $trace(AB) \neq trace(BA)$ ce qui est impossible et par suite, il n'existe aucune matrice A et B vérifiant **(1)**.

Le candidat doit aussi savoir que le rang du produit AB n'est pas nécessairement égal au rang du produit BA. Il serait d'ailleurs impardonnable de maintenir une telle affirmation après avoir répondu à la question précédente.

3 - *Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :*

$$\begin{cases} M^2 = A \\ M^3 = M^2 \end{cases} \quad \textit{où} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Un truc ; si vous ne savez pas par quoi commencer, proposer au jury de rechercher les éléments propres et de réduire la matrice. D'abord, c'est dans le cadre du programme, ensuite, on y voit plus clair avec une matrice plus simple (éventuellement diagonale).
En procédant ainsi, vous vous appercevrez très vite que la deuxiéme relation entre en conflit avec la première.
Toutefois, une méthode plus directe peut ici être utilisée. C'est elle que nous présenterons dans un premier temps ; nous reviendrons sur les éléments propres de la matrice après.

Réponse

Si M est une solution du problème, alors :

$$M^4 = M^3 M = M^2 M = M^3 = M^2$$

Calculons alors M^4. On a :

$$M^4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit

$$M^4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \neq M^2$$

Il n'existe donc aucune matrice M solution du problème.

Ayant traité le sujet avec dextérité, le jury ne se trouve pas embarassé pour continuer " la discution ".
Questions supplémentaires

a - *En utilisant le calcul précédent, donner deux valeurs propres de M^2.*

Désignons par φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est A. On a :

$$u_1 = \varphi(e_1) = 2e_1 - e_2 - e_3 \quad \text{et} \quad \varphi(u_1) = u_1$$

Donc 1 est une valeur propre de φ et u_1 en est un vecteur propre. On a aussi :

$$u_2 = \varphi(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad \varphi(u_2) = \vec{0}$$

Donc 0 est une valeur propre de φ et u_2 en est un vecteur propre.

b - *Montrer que les espaces $Ker(\varphi^2)$ et $Ker(\varphi - id)$ sont supplémentaires ; en déduire une matrice triangulaire semblable à A.*

On sait déjà que leur somme est directe, puisque si $v \in \text{Ker}(\varphi^2) \cap \text{Ker}(\varphi - id)$ alors

$$v = \varphi(v) \quad \text{et} \quad \varphi^2(v) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad v = \vec{0}$$

Il suffit donc de montrer que $\text{Ker}(\varphi^2)$ est de dimension 2.

- Les calculs précédents montrent que $u_2 \in \text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\varphi^2)$ et que $e_3 \in \text{Ker}(\varphi^2)$; donc la famille $\mathscr{F}_0 = (u_2, e_3)$ est une famille de vecteurs de $\text{Ker}(\varphi^2)$ et par suite :

$$Vect\, \mathscr{F}_0 \subset \text{Ker}(\varphi^2)$$

- On va montrer que cette inclusion est en fait une égalité : si $\text{Ker}(\varphi^2)$ était de dimension 3, alors φ^2 serait l'endomorphisme nul, ce qui n'est pas. Donc la dimension de $\text{Ker}(\varphi^2)$ est au plus égal à 2.

Montrons que la famille $\mathscr{F}_0$ est une famille libre de $\text{Ker}(\varphi^2)$.

Soit a et b deux réels tels que

$$a\, u_2 + b\, e_3 = \vec{0}$$

En lui appliquant φ, on obtient :

$$a\, \varphi(u_2) + b\, \varphi(e_3) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad b\, u = \vec{0}$$

Comme $u \neq \vec{0}$, on en déduit que $b = 0$ et par suite $a = 0$. Donc $\mathscr{F}_0$ est une famille libre de Ker (φ^2) ; de plus

$$2 = \text{Dim}\, Vect\, \mathscr{F}_0 \leq \text{Dim Ker}(\varphi^2) \leq 2$$

Donc $\text{Dim Ker}(\varphi^2) = 2$ et $\text{Ker}(\varphi^2) = Vect\, \mathscr{F}_0$.

- Le vecteur u_1 est un vecteur propre de φ pour la valeur propre 1. Par suite la famille $\mathscr{F} = (u_1, u_2, e_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que $\text{Dim Ker}(\varphi - id) = 1$ et aussi que la matrice de φ dans la base $\mathscr{F}$ est :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c - *Un projecteur est diagonalisable, mais en est-il de même de ses racines carrées ?*
Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\varphi^2 = p$, alors φ est-il nécessairement diagonalisable ?

Non, pas forcément : tout endomorphisme nilpotent dont l'indice de nilpotence est 2, est non diagonalisable, de carré égal au projecteur nul. Concrètement, on considère l'endomorphisme φ dont la matrice dans la base canonique est :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice, et donc l'endomorphisme associé, est non diagonalisable, puisqu'elle ne possède que 0 pour valeur propre et n'est pas la matrice nulle. Cependant, son carré est la matrice nulle : ainsi $\varphi^2 = \theta$, où θ est le projecteur sur $\{\vec{0}\}$ dans la direction de $\mathbb{R}^3$.